ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 6

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ, ДОПОЛНЕННОЕ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1978

517.1
В75
УДК 511 92

В $\frac{20202 - 146}{053(02)-78}$ 76-78

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1978, с изменениями.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В элементарной математике существует много задач, часто трудных и интересных, которые не связаны с чьим-либо именем, а скорее носят характер своего рода «математического фольклора». Такие задачи рассыпаны по обширной популярной или просто развлекательной математической литературе, и часто бывает очень трудно установить, в каком именно сборнике появилась впервые та или иная задача.

Эти задачи нередко имеют хождение в нескольких вариантах; иногда несколько таких задач объединяют в одну, более сложную; иногда, наоборот, одна задача распадается на несколько более простых; словом, часто оказывается трудно указать, где кончается одна задача и где начинается другая. Правильнее всего было бы считать, что в каждой из таких задач мы имеем дело с маленькими математическими теориями, имеющими свою историю, свою проблематику и свои методы, — все это, разумеется, тесно связанное с историей, проблематикой и методами «большой математики».

Такой теорией является и теория чисел Фибоначчи. Выросшие из знаменитой «задачи о кроликах», имеющей почти семисотпятидесятилетнюю давность *), числа Фибоначчи до сих пор остаются одной из самых увлекательных глав элементарной математики. Задачи, связанные с числами Фибоначчи, приводятся во многих популярных изданиях по математике, рассмат-

*) А сейчас, к моменту очередного издания данной брошюры, — ровно семисотпятидесятилетнюю давность.

риваются на занятиях школьных математических кружков, предлагаются на математических олимпиадах.

Предлагаемая книжка содержит круг вопросов, послуживших темой нескольких занятий математического кружка школьников при Ленинградском государственном ордена Ленина университете им. А. А. Жданова в 1949/50 учебном году. В соответствии с желаниями участников кружка на этих занятиях рассматривалась преимущественно теоретико-числовая сторона вопроса, которая развита более подробно и в настоящей брошюре.

Книжка рассчитана в основном на школьников 9—10 классов. Понятие предела встречается здесь только в пп. 8 и 9 § 3. Читатель, не знакомый с этим понятием, может без ущерба для понимания дальнейшего эти пункты при чтении пропустить. Сказанное относится также к биномиальным коэффициентам (пп. 11—15 § 1) и к тригонометрии (пп. 3 и 4 § 4). Излагаемые в брошюре элементы теории делимости и теории непрерывных дробей никаких предварительных знаний, выходящих за рамки школьного курса, у читателя не предполагают.

Читателям, которые заинтересуются самим принципом построения рекуррентных рядов, можно рекомендовать небольшую, но содержательную книжку А. И. Маркушевича «Возвратные последовательности», «Наука», М, 1975. Тех же, кого заинтересуют факты, относящиеся к теории чисел, можно отослать к серьезным курсам по этой дисциплине.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Первый вариант текста этой книжки писался почти тридцать лет тому назад. С тех пор изменилось очень многое.

Прежде всего, и это главное, изменился математический уровень основного круга читателей популярных математических книг: интересующихся математикой школьников старших классов и их преподавателей. Созданная сеть специализированных математических и физико-математических школ и классов предопределила существенное расширение математического кругозора соответствующего контингента учащихся, которых теперь можно заинтересовать скорее не забавными элементарными фактами, а уже достаточно глубокими и сложными результатами.

Кроме того, и это является фундаментальным фактом истории математики нашего времени, существенно сместился центр тяжести математических исследований в целом. В частности, утратила свои доминирующие позиции теория чисел, и резко повысился удельный вес экстремальных задач. В самостоятельную отрасль математики сложилась теория игр. По существу возникла вычислительная математика. Все это не могло не сказаться и на содержании научно-популярной литературы по математике.

Далее, числа Фибоначчи проявили себя еще в нескольких математических вопросах, среди которых в первую очередь следует назвать решение Ю. В. Матиясевичем десятой проблемы Гильберта и далеко не столь глубокую, но приобретшую широкую известность теорию поиска экстремума унимодальной функции, построенную впервые, по-видимому, Р. Беллманом.

Наконец, было установлено довольно большое количество ранее неизвестных свойств чисел Фибоначчи, а к самим числам существенно возрос интерес. Значительное число связанных с математикой людей в различных странах приобщились к благородному хобби «фибоначчизма». Наиболее убедительным свидетельством этому может служить журнал The Fibonacci Quarterly, издаваемый в США с 1963 г.

Все сказанное определило изменения содержания книги от издания к изданию и тот вид, в котором она предлагается читателю сейчас. Во втором издании был добавлен параграф о фибоначчиевых планах поиска экстремума унимодальной функции вместе с возникающими при этом общематематическими и вычислительными вопросами. В третьем издании была расширена теоретико-числовая тематика, и этот материал из § 2 оказался полезной информацией при решении десятой проблемы Гильберта. Наконец, в настоящем издании «подтягиваются» до общего уровня и объема § 3 и 4. В § 3 приводятся ставшие классическими теоремы о точности приближений подходящими дробями и описывается роль чисел Фибоначчи в этих фактах, а в § 4 рассматривается игра «цзяньшицзы», теоретико-игровой анализ которой опирается на детальное рассмотрение фибоначчиевых представлений натуральных чисел.

Книга по-прежнему не требует от читателя знаний, выходящих за пределы школьного курса. Более трудные ее места выделены мелким шрифтом и могут быть при чтении пропущены без ущерба для понимания остального материала.

Вырица 1
1978 г.

Н. Н. Воробьев

ВВЕДЕНИЕ

1. Древняя история богата выдающимися математиками. Многие достижения древней математической науки до сих пор вызывают восхищение остротой ума их авторов, а имена Евклида, Архимеда, Герона известны каждому образованному человеку.

Иначе обстоит дело с математикой средневековья. Кроме Виеты, жившего, впрочем, уже в шестнадцатом столетии, и математиков более близких нам времен школьный курс математики не называет ни одного имени, относящегося к средним векам. Это, конечно, не случайно. Математика в эту этоху развивалась чрезвычайно медленно, и крупных математиков тогда было очень мало.

Тем больший интерес представляет для нас сочинение «Liber abacci» («Книга об абаке»), написанная знаменитым итальянским математиком Леонардо из Пизы, который известен больше по своему прозвищу Фибоначчи (Fibonacci — сокращенное filius Bonacci, т. е. сын Боначчи). Эта книга, написанная в 1202 г., дошла до нас во втором своем варианте, который относится к 1228 г.

«Liber abacci» представляет собой объемистый труд, содержащий почти все арифметические и алгебраические сведения того времени и сыгравший заметную роль в развитии математики в Западной Европе в течение нескольких следующих столетий. В частности, именно по этой книге европейцы познакомились с индусскими («арабскими») цифрами.

Сообщаемый в «Liber abacci» материал поясняется на большом числе задач, составляющих значительную часть этого трактата.

Пара
1

Первый
2

Второй
3

Третий
5

Четвертый
8

Пятый
13

Шестой
21

Седьмой
34

Восьмой
55

Девятый
89

Десятый
144

Одиннадцатый
233

Двенадцатый
377

Рассмотрим одну такую задачу, помещенную на стр. 123—124 рукописи 1228 г.

«Сколько пар кроликов в один год от одной пары рождается?»

«Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течение года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рождают кролики со второго месяца после своего рождения. Так как первая пара в первом месяце дает потомство, удвой, и в этом месяце окажутся 2 пары; из них одна пара, а именно первая, рождает и в следующем месяце, так что во втором месяце оказывается 3 пары; из них в следующем месяце 2 пары будут давать потомство, так что в третьем месяце родятся еще 2 пары кроликов, и число пар кроликов в этом месяце достигнет 5; из них в этом же месяце будут давать потомство 3 пары, и число пар кроликов в четвертом месяце достигнет 8; из них 5 пар произведут другие 5 пар, которые, сложенные с 8 парами, дадут в пятом месяце 13 пар; из них 5 пар, рожденных в этом месяце, не дают в том же месяце потомства, а остальные 8 пар рождают, так что в шестом месяце оказывается 21 пара; сложенные с 13 парами, которые родятся в седьмом месяце, они дают 34 пары; сложенные с 21 парой, рожденной в восьмом месяце, они дают в этом

месяце 55 пар; сложенные с 34 парами, рожденными в девятом месяце, они дают 89 пар; сложенные вновь с 55 парами, которые рождаются в десятом месяце, они дают в этом месяце 144 пары; снова сложенные с 89 парами, которые рождаются в одиннадцатом месяце, они дают в этом месяце 233 пары; сложенные вновь с 144 парами, рожденными в последнем месяце, они дают 377 пар; столько пар произвела первая пара в данном месте к концу одного года. Действительно, на этих полях ты можешь увидеть, как мы это делаем; именно, мы складываем первое число со вторым, т. е. 1 и 2; и второе с третьим; и третье с четвертым; и четвертое с пятым; и так одно за другим, пока не сложим десятое с одиннадцатым, т. е. 144 с 233; и мы получим общее число упомянутых кроликов, т. е. 377; и так можно делать по порядку до бесконечного числа месяцев».

2. Перейдем теперь от кроликов к числам и рассмотрим следующую числовую последовательность:

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \tag{1}$$

в которой каждый член равен сумме двух предыдущих членов, т. е. при всяком $n > 2$

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}. \tag{2}$$

Такие последовательности, в которых каждый член определяется как некоторая функция предыдущих, часто встречаются в математике и называются *рекуррентными* или, по-русски, *возвратными* последовательностями. Сам процесс последовательного определения элементов таких последовательностей называется *рекуррентным процессом*, а равенство (2) — *возвратным* (*рекуррентным*) *уравнением*. Элементы общей теории возвратных последовательностей читатель может найти в уже упоминавшейся книжке А. И. Маркушевича (см. стр. 4).

Заметим прежде всего, что по одному только условию (2) члены последовательности (1) вычислять нельзя. Можно составить сколько угодно различных числовых последовательностей, удовлетворяющих

этому условию; например,

2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, ...,

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...,

$-1, -5, -6, -11, -17, \ldots$

и т. д.

Значит, для однозначного построения последовательности (1) условия (2) явно недостаточно, и нам следует указать некоторые дополнительные условия. Например, мы можем задать несколько первых членов последовательности (1). Сколько же первых членов последовательности (1) мы должны задать, чтобы можно было вычислять все следующие ее члены, пользуясь при этом только условием (2)?

Начнем с того, что не всякий член последовательности (1) может быть получен при помощи (2) уже хотя бы потому, что не у каждого члена (1) имеется два предшествующих; например, перед первым членом последовательности вообще не стоит ни одного члена, а перед вторым ее членом стоит только один. Значит, вместе с условием (2) для определения последовательности (1) нам нужно знать два ее первых члена.

Этого, очевидно, уже достаточно для того, чтобы иметь возможность вычислить любой член последовательности (1). В самом деле, u_3 можно вычислить как сумму заданных нам u_1 и u_2; u_4 — как сумму u_2 и уже вычисленного ранее u_3; u_5 — как сумму уже вычисленных u_3 и u_4 и т. д. «по порядку до бесконечного числа членов». Переходя таким образом от двух соседних членов последовательности к непосредственно следующему за ними члену, мы можем дойти до члена с любым наперед заданным номером и вычислить его.

3. Обратимся теперь к важному частному случаю последовательности (1), когда $u_1 = 1$ и $u_2 = 1$. Условие (2), как было только что отмечено, дает нам возможность вычислять последовательно один за другим все члены этого ряда. Нетрудно проверить, что в этом случае первыми четырнадцатью его членами будут числа

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,

которые уже встречались нам в задаче о кроликах.

В честь автора этой задачи вся последовательность (1) при $u_1 = u_2 = 1$ называется *рядом Фибоначчи*, а члены ее — *числами Фибоначчи*.

Числа Фибоначчи обладают целым рядом интересных и важных свойств, рассмотрению которых и посвящена вся эта книжка.

§ 1. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ

1. Вычислим сначала сумму первых n чисел Фибоначчи. Именно, докажем, что

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1. \qquad (1.1)$$

В самом деле, мы имеем:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_3 - u_2, \\ u_2 &= u_4 - u_3, \\ u_3 &= u_5 - u_4, \\ &\cdots\cdots \\ u_{n-1} &= u_{n+1} - u_n, \\ u_n &= u_{n+2} - u_{n+1}. \end{aligned}$$

Сложив все эти равенства почленно, мы получим

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - u_2,$$

и нам остается вспомнить, что $u_2 = 1$.

2. Сумма чисел Фибоначчи с нечетными номерами:

$$u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}. \qquad (1.2)$$

Для доказательства этого равенства напишем

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2, \\ u_3 &= u_4 - u_2, \\ u_5 &= u_6 - u_4, \\ &\cdots\cdots \\ u_{2n-1} &= u_{2n} - u_{2n-2}. \end{aligned}$$

Сложив эти равенства почленно, мы и получим требуемое.

3. Сумма чисел Фибоначчи с четными номерами:

$$u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1. \qquad (1.3)$$

На основании п. 1 мы имеем

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1;$$

вычтя почленно из этого равенства равенство (1.2), мы получим

$$u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1 - u_{2n} = u_{2n+1} - 1,$$

а это нам и требовалось.

Вычитая, далее, почленно (1.3) из (1.2), получаем

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2n-1} - u_{2n} = -u_{2n-1} + 1. \quad (1.4)$$

Прибавим теперь к обеим частям (1.4) по u_{2n+1}:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots - u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n} + 1. \quad (1.5)$$

Объединяя (1.4) и (1.5), получаем выражение для знакопеременной суммы чисел Фибоначчи:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n = \\ = (-1)^{n+1} u_{n-1} + 1. \quad (1.6)$$

4. Формулы (1.1) и (1.2) были выведены при помощи почленного сложения целой серии очевидных равенств. Еще одним примером применения этого приема может служить вывод формулы для суммы квадратов первых n чисел Фибоначчи:

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u_n u_{n+1}. \quad (1.7)$$

Заметим для этого, что

$$u_k u_{k+1} - u_{k-1} u_k = u_k (u_{k+1} - u_{k-1}) = u_k^2.$$

Сложив равенства

$$u_1^2 = u_1 u_2,$$
$$u_2^2 = u_2 u_3 - u_1 u_2,$$
$$u_3^2 = u_3 u_4 - u_2 u_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$u_n^2 = u_n u_{n+1} - u_{n-1} u_n$$

почленно, мы получаем формулу (1.7).

5. Многие соотношения между числами Фибоначчи удобно доказывать при помощи метода *полной индукции*.

Сущность метода полной индукции (называемого часто также методом математической индукции) состоит в следующем: для доказательства, что некоторое утверждение справедливо для всякого натурального числа, достаточно установить, что:

а) оно имеет место для числа 1;

б) из справедливости доказываемого утверждения для какого-либо произвольно выбранного натурального числа n следует его справедливость для числа $n+1$.

Всякое индуктивное доказательство утверждения, справедливого для любого натурального числа, состоит поэтому из двух частей.

В первой части (обычно сравнительно простой) устаиавливается справедливость доказываемого утверждения для единицы. Справедливость доказываемого утверждения для единицы называют иногда *основанием индукции*. Во второй части доказательства (как правило, более сложной) делается предположение о справедливости доказываемого утверждения для некоторого произвольного (но фиксированного) числа n, и из этого предположения, которое часто называют *индуктивным предположением*, выводится, что и для числа $n+1$ доказываемое утверждение имеет место. Вторая часть доказательства называется *индуктивным переходом*.

Подробное изложение метода полной индукции и многочисленные примеры применения различных вариантов этого метода можно найти в брошюре И. С. Соминского «Метод математической индукции» (серия «Популярные лекции по математике», вып. 3, М., «Наука», 1974). Так, в частности, неоднократно применяемый нами далее вариант метода полной индукции с основанием индукции, состоящим в доказательстве утверждения при $n=1$ и $n=2$, и индуктивным переходом «от n и $n+1$ к $n+2$» приводится в брошюре И. С. Соминского на стр. 13 и иллюстрируется на стр. 21—22 примером 7 и задачей 12.

Иногда применяется индуктивное рассуждение, которое можно назвать переходом «от всех чисел, меньших n, к n». При этом необходимость в специальном доказательстве основания индукции отпадает, так как, говоря формально, доказательство для случая $n=1$ и есть переход от «всех» целых положительных чисел, меньших единицы (которых просто нет), к единице.

Именно таким является доказательство возможности разложения любого натурального числа на простые множители.

Предположим, что каждое из чисел, меньших некоторого n, разложимо в произведение простых множителей. Если число n оказывается простым, то оно само и является своим разложением. Если же число n составное, то его, по определению, можно представить в виде произведения хотя бы двух сомножителей: $n = n_1 n_2$, где $n_1 \neq 1$ и $n_2 \neq 1$. Но тогда $n_1 < n$ и $n_2 < n$, а по индуктивному предположению как n_1, так и n_2 разлагаются на простые множители. Тем самым и n разложимо на простые множители.

Более сложные варианты индуктивного рассуждения лежат в основе доказательства теоремы п. 36 § 2 и в построении из п. 16 § 4.

6. Простейшей реализацией идеи индукции в применении к числам Фибоначчи является само

определение чисел Фибоначчи. Оно, как разъяснялось во Введении, состоит в указании двух первых чисел Фибоначчи: $u_1 = 1$ и $u_2 = 1$ и в индуктивном переходе от u_n и u_{n+1} к u_{n+2}, даваемым рекуррентным соотношением

$$u_n + u_{n+1} = u_{n+2}.$$

В частности, отсюда автоматически следует, что если некоторая последовательность чисел начинается с двух единиц, а каждое из следующих получается сложением двух предыдущих, то эта последовательность является последовательностью чисел Фибоначчи.

В качестве примера рассмотрим так называемую «задачу о прыгуне». Она состоит в следующем.

Прыгун может прыгать в одном направлении вдоль разделенной на клетки полосы, перемещаясь при каждом прыжке либо в соседнюю клетку, либо через клетку. Сколькими способами может он сдвинуться на $n - 1$ клетку и, в частности, переместиться из первой клетки в n-ю? (Способы прыгания считаются одинаковыми, если в ходе каждого из них прыгун побывает в одних и тех же клетках.)

Обозначим искомое число через x_n. Очевидно, $x_1 = 1$ (ибо переход из первой клетки в первую же осуществляется только одним способом — отсутствием прыжков) и $x_2 = 1$ (переход из первой клетки во вторую также единствен: он состоит в одном непосредственном прыжке на соседнюю клетку). Пусть целью прыгуна является достижение $n + 2$-й клетки. Общее число способов осуществления этой цели в наших обозначениях равно x_{n+2}. Но с самого начала эти способы разбиваются на два класса: начинающиеся с прыжка во вторую клетку и начинающиеся с прыжка в третью клетку. Из второй клетки прыгун может переместиться в $n + 2$-ю x_{n+1} способами, а из третьей x_n способами. Таким образом, последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$x_n + x_{n+1} = x_{n+2}$$

и поэтому совпадает с последовательностью чисел Фибоначчи: $x_n = u_n$.

7. Докажем по индукции следующую важную формулу:

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}. \qquad (1.8)$$

Доказательство этой формулы будем вести индукцией по m. При $m = 1$ эта формула приимает вид $u_{n+1} = u_{n-1}u_1 + u_n u_2$, что очевидно. При $m = 2$ формула (1.8) также верна, потому что

$$u_{n+2} = u_{n-1}u_2 + u_n u_3 = u_{n-1} + 2u_n =$$
$$= u_{n-1} + u_n + u_n = u_{n+1} + u_n.$$

Основание индукции, таким образом, доказано. Индуктивный переход докажем в следующей форме: предполагая, что формула (1.8) справедлива при $m = k$ и при $m = k + 1$, докажем, что она имеет место и при $m = k + 2$.

Итак, пусть

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n = u_{n-1} + u_n + u_n =$$
$$= u_{n-1} + 2u_n = u_{n-1}u_2 + u_n u_3.$$

Сложив последние два равенства почленно, мы получим

$$u_{n+k+2} = u_{n-1}u_{k+2} + u_n u_{k+3},$$

а это и требовалось.

Формулу (1.8) легко интерпретировать (и даже доказать) в терминах задачи о прыгуне.

Именно, общее число способов перемещения прыгуна из первой клетки в $n + m$-ю равно u_{n+m}. Среди этих способов будут как те, при которых прыгун перепрыгнет через n-ю клетку, так и те, при которых он побывает в ней.

При способах первого класса прыгун обязан достичь $n - 1$-й клетки (он может сделать это u_{n-1} способами), затем совершить прыжок на $n + 1$-ю клетку и, наконец, сместиться на оставшиеся $(n + m) - (n + 1) = m - 1$ клеток (это осуществимо u_m способами). Следовательно, первый класс насчитывает $u_{n-1}u_m$ способов. Аналогично, при способах второго класса прыгун достигает n-й клетки (это возможно u_n способами), после чего переходит в $n + m$-ю клетку (одним из u_{m+1} способов). Поэтому во втором

классе имеется $u_n u_{m+1}$ способов, и формула (1.8) доказана.

8. Полагая в формуле (1.8) $m = n$, мы получаем

$$u_{2n} = u_{n-1}u_n + u_n u_{n+1},$$

или

$$u_{2n} = u_n (u_{n-1} + u_{n+1}). \tag{1.9}$$

Из написанного равенства видно, что u_{2n} делится на u_n. В следующем параграфе мы докажем значительно более общее утверждение.

Так как

$$u_n = u_{n+1} - u_{n-1},$$

формулу (1.9) можно переписать так:

$$u_{2n} = (u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} + u_{n-1}),$$

или

$$u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2,$$

т. е. разность квадратов двух чисел Фибоначчи, номера которых отличаются на два, есть снова число Фибоначчи.

Аналогично (полагая $m = 2n$) можно показать, что

$$u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3.$$

9. В дальнейшем нам пригодится следующая формула:

$$u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^{n+1}. \tag{1.10}$$

Докажем ее индукцией по n. Для $n = 2$ (1.10) принимает вид

$$u_2^2 = u_1 u_3 - 1,$$

что очевидно.

Предположим теперь формулу (1.10) доказанной для некоторого n. Прибавим к обеим частям ее по $u_n u_{n+1}$. Мы получим

$$u_n^2 + u_n u_{n+1} = u_{n-1}u_{n+1} + u_n u_{n+1} + (-1)^{n+1},$$

или

$$u_n (u_n + u_{n+1}) = u_{n+1}(u_{n-1} + u_n) + (-1)^{n+1},$$

или

$$u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2 + (-1)^{n+1},$$

или

$$u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^{n+2}.$$

Этим индуктивный переход обоснован, и формула (1.10) доказана для любого n.

10. Аналогично только что доказанным свойствам чисел Фибоначчи можно установить еще и такие свойства этих чисел:

$$u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_4 + \ldots + u_{2n-1} u_{2n} = u_{2n}^2,$$

$$u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_4 + \ldots + u_{2n} u_{2n+1} = u_{2n+1}^2 - 1,$$

$$nu_1 + (n-1)u_2 + (n-2)u_3 + \ldots + 2u_{n-1} + u_n = u_{n+4} - (n+3),$$

$$u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \ldots + nu_n = nu_{n+2} - u_{n+3} + 2.$$

Доказательство предоставляется провести читателю.

11. Не менее замечательными, чем числа Фибоначчи, являются другие числа, называемые *биномиальными коэффициентами.*

Биномиальными коэффициентами называются коэффициенты при степенях x в разложениях степеней $(1+x)^n$:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n. \quad (1.11)$$

Очевидно, числа C_n^k однозначно определены при всех целых неотрицательных n и всех целых неотрицательных k, не превосходящих n.

Использование биномиальных коэффициентов оказывается весьма удобным во многих математических рассуждениях. Пригодятся они нам и при изучении свойств чисел Фибоначчи. Кроме того, биномиальные коэффициенты связаны с числами Фибоначчи и непосредственно, и мы выявим некоторые закономерности, связывающие эти два класса чисел.

Предварительно установим некоторые свойства биномиальных коэффициентов.

Положив в (1.11) $n = 1$, мы сразу видим, что

$$C_1^0 = C_1^1 = 1;$$

кроме того, имеет место следующая лемма.

Лемма. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Доказательство. Мы имеем

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x),$$

или, пользуясь определением биномиальных коэффициентов,

$$C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 x + \ldots + C_{n+1}^{k+1} x^{k+1} + \ldots + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} =$$
$$= (C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^k x^k + C_n^{k+1} x^{k+1} + \ldots$$
$$\ldots + C_n^n x^n)(1+x) = C_n^0 + (C_n^0 + C_n^1) x + \ldots$$
$$\ldots + (C_n^k + C_n^{k+1}) x^{k+1} + \ldots + (C_n^{n-1} + C_n^n) x^n + C_n^n x^{n+1}.$$

Но слева и справа в этом равенстве стоит *один и тот же* полином. Поэтому и коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа должны быть равны.

В частности, должно быть

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1},$$

а это и требовалось.

Из доказанной леммы следует, что биномиальные коэффициенты можно вычислять при помощи некоторого рекуррентного процесса, подобного процессу получения чисел Фибоначчи, только значительно более сложной природы. Это же обстоятельство дает нам возможность доказывать по индукции разного рода утверждения о биномиальных коэффициентах.

12. Расположим биномиальные коэффициенты в виде следующей таблицы, называемой *треугольником Паскаля*:

$$C_0^0$$
$$C_1^0 \; C_1^1$$
$$C_2^0 \; C_2^1 \; C_2^2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$C_n^0 \; C_n^1 \; C_n^2 \ldots C_n^n$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

т. е.

```
1
1  1
1  2  1
1  3  3  1
1  4  6  4  1
1  5 10 10  5  1
1  6 15 20 15  6  1
. . . . . . . . . .
```

Подробное изложение основных свойств треугольника Паскаля и составляющих его биномиальных коэффициентов содержится в брошюре В. А. Успенского «Треугольник Паскаля» (серия «Популярные лекции по математике», вып. 43, «Наука», 1966).

Строки треугольника Паскаля принято нумеровать сверху вниз, причем верхняя строка, состоящая из единственной единицы, считается нулевой.

Из предыдущего вытекает, что крайние члены в каждой из строк треугольника Паскаля равны единице, а каждый из остальных членов таблицы получается путем сложения двух других, стоящих непосредственно над ним.

13. Формула (1.11) позволяет нам сразу вывести два важных соотношения, связывающих биномиальные коэффициенты, составляющие одну строку треугольника Паскаля.

Полагая в (1.11) $x = 1$, мы получаем

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n.$$

Если же принять $x = -1$, то мы получим

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n.$$

14. Докажем индукцией по n, что

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}. \qquad (1.12)$$

Эта формула часто принимается за определение биномиальных коэффициентов. Она характеризует биномиальный коэффициент C_n^k как число сочетаний из n элементов по k. Мы пошли здесь по иному, более

формальному пути, который в данном случае предпочтительнее.

Если согласиться считать, что произведение нулевого числа сомножителей всегда равно единице, то при $k = 0$ мы из (1.12) получаем уже известное нам $C_n^0 = 1$. Имея это в виду, мы можем ограничиться случаем $k \geqq 1$.

При $n = 1$ мы имеем

$$C_1^1 = \frac{1}{1} = 1.$$

Пусть теперь при некотором данном n формула (1.12) справедлива при любом значении $k = 0, 1, \ldots, n$.

Рассмотрим число C_{n+1}^k. Так как $k \geqq 1$, мы можем написать

$$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k,$$

или, воспользовавшись индуктивным предположением (1.12),

$$C_n^{k-1} + C_n^k =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k-1)} + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k-1)\,k} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k-1)}\left(1 + \frac{n-k+1}{k}\right) =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k-1)}\,\frac{k+n-k+1}{k} =$$

$$= \frac{(n+1)\,n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k-1)\,k} = C_{n+1}^k.$$

Последнее равенство является формулой (1.12) для биномиальных коэффициентов из следующей, $n+1$-й строки треугольника Паскаля.

15. Проведем через числа треугольника Паскаля линии, идущие под углом 45 градусов к его строкам, и назовем их *восходящими диагоналями* треугольника Паскаля. Восходящими диагоналями будут, например, прямые, проходящие через числа 1, 4, 3 или 1, 5, 6, 1.

Покажем, что сумма чисел, лежащих на некоторой восходящей диагонали, есть число Фибоначчи.

В самом деле, первая, самая верхняя восходящая диагональ треугольника Паскаля состоит только из единицы. Только из единицы состоит и вторая его диагональ. Для доказательства инте-

ресующего нас предложения нам достаточно показать, что сумма всех чисел, составляющих n-ю и $n+1$-ю диагонали треугольника Паскаля, равна сумме чисел, составляющих его $n+2$-ю диагональ.

Но на n-й диагонали расположены числа

$$C_{n-1}^0,\quad C_{n-2}^1,\quad C_{n-3}^2,\ \ldots,$$

а на $n+1$-й — числа

$$C_n^0,\quad C_{n-1}^1,\quad C_{n-2}^2,\ \ldots$$

Сумму всех этих чисел запишем так:

$$C_n^0+\left(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1\right)+\left(C_{n-2}^1+C_{n-2}^2\right)+\ \ldots,$$

или, принимая во внимание лемму в п. 11,

$$C_{n+1}^0+C_n^1+C_{n-1}^2+\ \ldots$$

Последнее выражение есть сумма чисел, лежащих на $n+2$-й восходящей диагонали треугольника.

Из только что доказанного на основании формулы (1.1) мы сразу получаем: сумма всех биномиальных коэффициентов, лежащих выше n-й восходящей диагонали треугольника Паскаля (включая саму эту диагональ), равна $u_{n+2}-1$.

Используя формулы (1.2), (1.3), (1.4) и подобные им, читатель без труда может получить дальнейшие тождества, связывающие числа Фибоначчи с биномиальными коэффициентами.

16. До сих пор мы определяли число Фибоначчи рекуррентно, т. е. индуктивно, по их номеру. Оказывается, однако, что любое число Фибоначчи можно определить и непосредственно, как некоторую функцию его номера.

Исследуем для этого различные последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, удовлетворяющие соотношению

$$u_n=u_{n-2}+u_{n-1}. \tag{1.13}$$

Все такие последовательности мы будем называть *решениями уравнения* (1.13).

Будем обозначать буквами V, V' и V'' соответственно последовательности

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots$$
$$v_1',\ v_2',\ v_3',\ \ldots$$
$$v_1'',\ v_2'',\ v_3'',\ \ldots$$

Сначала докажем две простые леммы.

Лемма 1. *Если V есть решение уравнения* (1.13), *а c — произвольное число, то последовательность cV (т. е. последовательность $cv_1, cv_2, cv_3, \ldots$) есть также решение уравнения* (1.13).

Доказательство. Умножив соотношение

$$v_n = v_{n-2} + v_{n-1}$$

почленно на c, мы получаем

$$cv_n = cv_{n-2} + cv_{n-1},$$

а это и требовалось.

Лемма 2. *Если последовательности V' и V'' являются решениями уравнения* (1.13), *то и их сумма $V' + V''$ (т. е. последовательность $v'_1 + v''_1$, $v'_2 + v''_2$, $v'_3 + v''_3$, ...) также является решением уравнения* (1.13).

Доказательство. Из условия леммы мы имеем

$$v'_n = v'_{n-2} + v'_{n-1}$$

и

$$v''_n = v''_{n-2} + v''_{n-1}.$$

Сложив эти два равенства почленно, мы получим

$$v'_n + v''_n = (v'_{n-2} + v''_{n-2}) + (v'_{n-1} + v''_{n-1}).$$

Этим лемма доказана.

Пусть теперь V' и V'' — два непропорциональных решения уравнения (1.13) (т. е. два таких решения уравнения (1.13), что при любом постоянном c найдется такой номер n, для которого $\frac{v'_n}{v''_n} \neq c$). Покажем, что всякую последовательность V, являющуюся решением уравнения (1.13), можно представить в виде

$$c_1 V' + c_2 V'', \tag{1.14}$$

где c_1 и c_2 — некоторые постоянные. Поэтому принято говорить, что (1.14) является *общим решением* уравнения (1.13).

Предварительно докажем, что если решения V' и V'' уравнения (1.13) непропорциональны, то

$$\frac{v'_1}{v''_1} \neq \frac{v'_2}{v''_2} \tag{1.15}$$

(т. е. что эта непропорциональность обнаруживается уже в первых двух членах последовательностей V' и V'').

Доказательство (1.15) ведется от противного. Пусть для непропорциональных решений V' и V'' уравнения (1.13)

$$\frac{v_1'}{v_1''} = \frac{v_2'}{v_2''}. \tag{1.16}$$

Написав производную пропорцию, мы получаем

$$\frac{v_1' + v_2'}{v_1'' + v_2''} = \frac{v_2'}{v_2''}$$

или, принимая во внимание, что V' и V'' являются решениями уравнения (1.13),

$$\frac{v_3'}{v_3''} = \frac{v_2'}{v_2''}.$$

Аналогично убеждаемся (индукция!) в том, что

$$\frac{v_3'}{v_3''} = \frac{v_4'}{v_4''} = \ldots = \frac{v_n'}{v_n''} = \ldots$$

Таким образом, из (1.16) следует, что последовательности V' и V'' пропорциональны, а это противоречит предположению. Значит, справедливо (1.15).

Возьмем теперь некоторую последовательность V, являющуюся решением уравнения (1.13). Эта последовательность, как уже было выяснено в п. 2 Введения, вполне определена, если заданы два ее первых члена, v_1 и v_2.

Найдем такие c_1 и c_2, чтобы имело место

$$\begin{aligned} c_1 v_1' + c_2 v_1'' &= v_1, \\ c_1 v_2' + c_2 v_2'' &= v_2. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Тогда на основании лемм 1 и 2 $c_1 V' + c_2 V''$ даст нам последовательность V.

Ввиду условия (1.15) система уравнений (1.17) разрешима относительно c_1 и c_2, каковы бы ни были числа v_1 и v_2:

$$c_1 = \frac{v_1 v_2'' - v_2 v_1''}{v_1' v_2'' - v_1'' v_2'}, \qquad c_2 = \frac{v_1' v_2 - v_2' v_1}{v_1' v_2'' - v_1'' v_2'}.$$

(Условие (1.15) означает, что общий знаменатель этих дробей отличен от нуля.) Подставив вычисленные значения c_1 и c_2 в (1.14), мы и получим требуемое представление последовательности V.

Значит, для описания *всех* решений уравнения (1.13) нам достаточно найти *какие-нибудь два* его непропорциональных решения.

Будем искать эти решения среди геометрических прогрессий. В соответствии с леммой 1 достаточно ограничиться рассмотрением только таких прогрессий, у которых первый член равен единице. Итак, возьмем прогрессию

$$1, \ q, \ q^2, \ \ldots$$

Чтобы она была решением уравнения (1.13), необходимо, чтобы при всяком n выполнялось

$$q^{n-2} + q^{n-1} = q^n,$$

или, сокращая на q^{n-2},

$$1 + q = q^2. \tag{1.18}$$

Корни этого квадратного уравнения, т. е. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, и будут искомыми знаменателями прогрессий. Мы будем их обозначать соответственно через α и β. Подчеркнем, что для чисел α и β, как для корней уравнения (1.18), должно иметь место $1 + \alpha = \alpha^2$, $1 + \beta = \beta^2$ и $\alpha\beta = -1$.

Мы получили, таким образом, две геометрические прогрессии, являющиеся решениями уравнения (1.13). Поэтому все последовательности вида

$$c_1 + c_2, \quad c_1\alpha + c_2\beta, \quad c_1\alpha^2 + c_2\beta^2, \ \ldots \tag{1.19}$$

являются решениями уравнения (1.13). Так как найденные нами прогрессии имеют разные знаменатели и потому непропорциональны, формула (1.19) при

различных c_1 и c_2 дает нам все решения уравнения (1.13).

В частности, при некоторых c_1 и c_2 формула (1.19) должна дать нам и ряд Фибоначчи. Для этого, как указывалось выше, нужно определить c_1 и c_2 из уравнений

$$c_1 + c_2 = u_1$$

и

$$c_1\alpha + c_2\beta = u_2,$$

т. е. из системы

$$c_1 + c_2 = 1,$$

$$c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1.$$

Решив эту систему, мы получаем

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}},$$

откуда

$$u_n = c_1\alpha^{n-1} + c_2\beta^{n-1} =$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

т. е.

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \qquad (1.20)$$

Формула (1.20) называется *формулой Бине* (по имени математика, который ее вывел).

Очевидно, подобные формулы можно указать и для других решений (1.13). Пусть читатель сделает это для последовательностей, приведенных в п. 2 Введения.

17. Мы видели, что $\alpha^2 = \alpha + 1$. Ясно поэтому, что любую целую положительную степень числа α можно представить в виде $a\alpha + b$ с целыми коэффициентами a и b. Так,

$$\alpha^3 = \alpha\alpha^2 = \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha = \alpha + 1 + \alpha = 2\alpha + 1,$$

$$\alpha^4 = \alpha\alpha^3 = \alpha(2\alpha + 1) = 2\alpha^2 + \alpha = 2\alpha + 2 + \alpha = 3\alpha + 2$$

и т. д.

Покажем (по индукции), что

$$\alpha^n = u_n\alpha + u_{n-1}.$$

Действительно, для $n=2$, 3 это справедливо. Предположим, что

$$\alpha^k = u_k\alpha + u_{k-1},$$
$$\alpha^{k+1} = u_{k+1}\alpha + u_k.$$

Сложив эти равенства, мы получим

$$\alpha^k + \alpha^{k+1} = (u_k + u_{k+1})\,\alpha + (u_{k-1} + u_k),$$

или

$$\alpha^{k+2} = u_{k+2}\alpha + u_{k+1},$$

и индуктивный переход обоснован.

Аналогично из $\beta^2 = \beta + 1$ следует

$$\beta^n = u_n\beta + u_{n-1}.$$

18. При помощи формулы Бине удобно суммировать многие ряды, связанные с числами Фибоначчи.

Найдем, например, чему равна сумма

$$u_3 + u_6 + u_9 + \ldots + u_{3n}.$$

Мы имеем

$$u_3 + u_6 + \ldots + u_{3n} = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^6 - \beta^6}{\sqrt{5}} + \ldots + \frac{\alpha^{3n} - \beta^{3n}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^3 + \alpha^6 + \ldots + \alpha^{3n} - \beta^3 - \beta^6 - \ldots - \beta^{3n})$$

или, суммируя встретившиеся нам геометрические прогрессии,

$$u_3 + u_6 + \ldots + u_{3n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3} - \alpha^3}{\alpha^3 - 1} - \frac{\beta^{3n+3} - \beta^3}{\beta^3 - 1}\right).$$

Но

$$\alpha^3 - 1 = \alpha + \alpha^2 - 1 = \alpha + \alpha + 1 - 1 = 2\alpha,$$

и аналогично $\beta^3 - 1 = 2\beta$. Поэтому

$$u_3 + u_6 + \ldots + u_{3n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3} - \alpha^3}{2\alpha} - \frac{\beta^{3n+3} - \beta^3}{2\beta}\right),$$

или, произведя сокращения,

$$u_3 + u_6 + \ldots + u_{3n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+2} - \alpha^2 - \beta^{3n+2} + \beta^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^{3n+2} - \beta^{3n+2}}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{2}(u_{3n+2} - u_2) = \frac{u_{3n+2} - 1}{2}.$$

19. В качестве следующего примера применения формулы Бине вычислим сумму кубов первых n чисел Фибоначчи.

Заметим предварительно, что

$$u_k^3 = \left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}}\right)^3 = \frac{1}{5}\,\frac{\alpha^{3k} - 3\alpha^{2k}\beta^k + 3\alpha^k\beta^{2k} - \beta^{3k}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{\alpha^{3k} - \beta^{3k}}{\sqrt{5}} - 3\alpha^k\beta^k\,\frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(u_{3k} - (-1)^k\, 3u_k\right) = \frac{1}{5}\left(u_{3k} + (-1)^{k+1}\, 3u_k\right).$$

Поэтому

$$u_1^3 + u_2^3 + \ldots + u_n^3 =$$

$$= \frac{1}{5}\left((u_3 + u_6 + \ldots + u_{3n}) + 3(u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n+1} u_n)\right),$$

или, пользуясь формулой (1.6) и результатами предыдущего пункта,

$$u_1^3 + u_2^3 + \ldots + u_n^3 = \frac{1}{5}\left(\frac{u_{3n+2} - 1}{2} + (-1)^{n+1}\, 3u_{n-1} + 3\right) =$$

$$= \frac{u_{3n+2} + (-1)^{n+1}\, 6u_{n-1} + 5}{10}.$$

20. Уместно поставить вопрос о том, как быстро растут числа Фнбоначчи при увеличении их номеров. Формула Бине дает нам достаточно исчерпывающий ответ и на этот вопрос.

Нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема. *Число Фибоначчи u_n есть ближайшее целое число к $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$, т. е. к n-му члену a_n геометрической прогрессии, первый член которой есть $\frac{\alpha}{\sqrt{5}}$, а знаменатель равен α.*

Доказательство. Очевидно, нам достаточно установить, что абсолютная величина разности между u_n и a_n всегда меньше $\frac{1}{2}$. Но

$$|u_n - a_n| = \left|\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{\alpha^n - \alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\right| = \frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}}.$$

Так как $\beta = -0{,}618\ldots$, то $|\beta| < 1$, а значит, $|\beta|^n < 1$ при любом n, и тем более (так как $\sqrt{5} > 2$) должно быть $\frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$. Теорема доказана.

Читатель, знакомый с теорией пределов, легко сможет, несколько видоизменив доказательство этой теоремы, показать, что

$$\lim_{n\to\infty} |u_n - a_n| = 0.$$

Пользуясь доказанной теоремой, можно вычислять числа Фибоначчи при помощи таблиц логарифмов.

Вычислим, например, u_{14} (u_{14}, как легко сообразить, должно являться ответом задачи Фибоначчи о кроликах):

$$\sqrt{5} = 2{,}2361, \qquad \lg\sqrt{5} = 0{,}34949;$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180, \qquad \lg\alpha = 0{,}20898;$$

$$\lg\frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} = 14 \cdot 0{,}20898 - 0{,}34949 = 2{,}5762,$$

$$\frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} = 376{,}9.$$

Ближайшим целым числом к 376,9 является 377; это и есть u_{14}.

При вычислении чисел Фибоначчи с большими номерами мы уже не сможем по таблицам логарифмов определить все цифры числа, а сможем указать только несколько первых цифр его, так что вычисление оказывается приближенным.

В виде упражнения читатель может доказать, что в десятичной системе счисления u_n при $n \geqq 17$ имеет не более $\frac{n}{4}$ и не менее $\frac{n}{5}$ цифр. А из скольких цифр состоит u_{1000}?

21. Результат предыдущего пункта можно уточнить. Следующая теорема пригодится нам в дальнейшем.

Теорема.

$$\frac{\alpha^{n-\frac{1}{n}}}{\sqrt{5}} \leqq u_n \leqq \frac{\alpha^{n+\frac{1}{n}}}{\sqrt{5}}.$$

Доказательство. Мы ограничимся доказательством левой стороны неравенства: правая доказывается аналогично.

Поскольку согласно формуле Бине

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n),$$

а $\alpha\beta = -1$, для наших целей будет достаточно показать, что

$$\alpha^{n-\frac{1}{n}} \leqq \alpha^n - \frac{1}{\alpha^n},$$

или

$$\alpha^{2n-\frac{1}{n}} \leqq \alpha^{2n} - 1,$$

или, возводя в степень n,

$$\alpha^{2n^2-1} \leqq (\alpha^{2n} - 1)^n. \tag{1.21}$$

Будем доказывать это неравенство по индукции. При $n = 1$ оно превращается в

$$\alpha \leqq \alpha^2 - 1,$$

что действительно имеет место (именно, со знаком равенства). При $n = 2$ (1.21) означает

$$\alpha^7 \leqq (\alpha^4 - 1)^2. \tag{1.22}$$

Это неравенство можно проверить и прямым вычисленнем. Однако его можно и доказать, воспользовавшись соотношением, выведенным в п. 17. В данном случае мы имеем

$$\alpha^4 = 3\alpha + 2,$$

$$(\alpha^4 - 1)^2 = (3\alpha + 1)^2 = 9\alpha^2 + 6\alpha + 1 = 15\alpha + 10,$$

и (1.22) переписывается как

$$\alpha^7 = 13\alpha + 8 \leqq 15\alpha + 10,$$

что очевидно. Наконец, при $n = 3$ (1.21) переписывается как

$$\alpha^{17} \leqq (\alpha^6 - 1)^3,$$

что проверяется аналогично предыдущему.

Предположим теперь, что $n > 2$ и (1.21) имеет место, и докажем, что

$$\alpha^{2(n+1)^2-1} \leqq (\alpha^{2n+2} - 1)^{n+1}.$$

Для этого достаточно показать, что при увеличении n на единицу правая часть (1.21) растет быстрее левой части. Но левая часть, очевидно, возрастает в α^{4n+2} раз. Оценим увеличение правой части.

Мы имеем

$$\frac{(\alpha^{2(n+1)} - 1)^{n+1}}{(\alpha^{2n} - 1)^n} = (\alpha^{2(n+1)} - 1)\left(\frac{\alpha^{2(n+1)} - 1}{\alpha^{2n} - 1}\right)^n.$$

Последняя дробь больше, чем α^2, и притом на

$$\frac{\alpha^{2(n+1)} - 1}{\alpha^{2n} - 1} - \alpha^2 = \frac{\alpha^{2n+2} - 1 - \alpha^{2n+2} + \alpha^2}{\alpha^{2n} - 1} = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^{2n} - 1} =$$

$$= \frac{1}{\alpha^{2n-2} + \alpha^{2n-4} + \ldots + \alpha^2 + 1} > \frac{1}{\alpha^{2n-1}}.$$

Следовательно, пользуясь формулой бинома (см., например, п. 11 § 1),

$$\left(\frac{\alpha^{2(n+1)}-1}{\alpha^{2n}-1}\right)^n > \left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^{2n-1}}\right)^n = \alpha^{2n}+n\frac{\alpha^{2n-2}}{\alpha^{2n-1}}+\ldots,$$

где точки стоят вместо положительных слагаемых.

Ввиду того, что $n>2$, написанное выражение больше, чем $\alpha^{2n}+1$. Значит,

$$\frac{(\alpha^{2(n+1)}-1)^{n+1}}{(\alpha^{2n}-1)^n} > (\alpha^{2(n+1)}-1)(\alpha^{2n}+1) =$$
$$= \alpha^{4n+2}+\alpha^{2n+2}-\alpha^{2n}-1 = \alpha^{4n+2}+\alpha^{2n}(\alpha^2-1)-1 =$$
$$= \alpha^{4n+2}+\alpha^{2n+1}-1 > \alpha^{4n+2},$$

и теорема доказана.

22. Рассмотрим еще один класс последовательностей, основанных на числах Фибоначчи. Пусть x — произвольное число. Вычислим сумму

$$s_n(x) = u_1x+u_2x^2+\ldots+u_nx^n.$$

Для этого воспользуемся прежде всего формулой Бине:

$$s_n(x) = \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{5}}x+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{5}}x^2+\ldots+\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}x^n =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha x+\alpha^2x^2+\ldots+\alpha^nx^n) -$$
$$-\frac{1}{\sqrt{5}}(\beta x+\beta^2x^2+\ldots+\beta^nx^n). \quad (1.23)$$

Здесь в скобках написаны суммы двух геометрических прогрессий со знаменателями αx и βx. Известная формула, выражающая сумму геометрической прогрессии, справедлива в том случае, когда знаменатель прогрессии отличен от единицы. Если же он равен единице, то все члены прогрессии равны друг другу, и их сумма вычисляется совсем просто.

В соответствии со сказанным рассмотрим сначала случай, когда $\alpha x \neq 1$ и $\beta x \neq 1$, т. е. когда $x \neq \frac{1}{\alpha} = -\beta$ и $x \neq \frac{1}{\beta} = -\alpha$. В этих случаях, суммируя в

(1.23) геометрические прогрессии, мы получаем

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\alpha^{n+1}x^{n+1} - \alpha x}{\alpha x - 1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\beta^{n+1}x^{n+1} - \beta x}{\beta x - 1},$$

или, выполняя естественные преобразования,

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{(\alpha^{n+1}x^{n+1} - \alpha x)(\beta x - 1) - (\beta^{n+1}x^{n+1} - \beta x)(\alpha x - 1)}{(\alpha x - 1)(\beta x - 1)}$$

и далее —

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\alpha^{n+1}\beta x^{n+2} - \alpha^{n+1}x^{n+1} + \alpha x}{\alpha\beta x^2 - (\alpha + \beta)x + 1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha\beta^{n+1}x^{n+2} - \beta^{n+1}x^{n+1} + \beta x}{\alpha\beta x^2 - (\alpha + \beta)x + 1} \right).$$

Вспоминая, что $\alpha\beta = -1$, $\alpha + \beta = 1$, а $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, мы имеем

$$s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{x\sqrt{5} - (\alpha^n - \beta^n)x^{n+2} - (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1})x^{n+1}}{1 - x - x^2}$$

и окончательно

$$s_n(x) = \frac{x - u_n x^{n+2} - u_{n+1}x^{n+1}}{1 - x - x^2}. \qquad (1.24)$$

В частности, полагая в этой формуле $x = 1$, мы получим

$$s_n(1) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{1 - u_n - u_{n+1}}{-1} = u_{n+2} - 1,$$

что соответствует сказанному в п. 1.

При $x = -1$ имеем

$$s_n(-1) = u_1 - u_2 + \ldots + (-1)^{n-1}u_n =$$

$$= \frac{-1 - u_n(-1)^{n+2} - u_{n+1}(-1)^{n+1}}{-1} = (-1)^{n+1}u_{n-1} + 1$$

(ср. формулу (1.6)).

Рассмотрим теперь оставшиеся «особые» случаи.

Пусть $x = \frac{1}{\alpha} = -\beta$. Тогда в (1.23) каждый член первой прогрессии равен единице, и сумма этой прогрессии равна n. Во второй же прогрессии знаменатель оказывается равным $-\beta^2$.

Таким образом,

$$s_n\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(n-\left(\beta^2-\beta^4+\ \dots\ +(-1)^{n-1}\beta^{2n}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(n-\frac{\beta^2-(-1)^n\beta^{2n+2}}{1+\beta^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(n-\frac{\beta^2}{1+\beta^2}+(-1)^n\beta^{2n}\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\right).$$

Замечая, что

$$1+\beta^2=2+\beta=2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{5-\sqrt{5}}{2},$$

а

$$\frac{\beta^2}{1+\beta^2}=\frac{1+\beta}{2+\beta}=\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\frac{(3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}=$$

$$=\frac{10-2\sqrt{5}}{20},$$

мы получаем окончательно

$$s_n\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{n}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}-1}{10}+(-1)^n\beta^{2n}\frac{\sqrt{5}-1}{10}. \quad (1.25)$$

Наконец, пусть $x=\frac{1}{\beta}$. В этом случае в (1.23) единице равен знаменатель второй прогрессии, а знаменатель первой прогрессии равен $-\alpha^2$. Мы имеем

$$s_n\left(\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\alpha^2-\alpha^4+\ \dots\ +(-1)^{n-1}\alpha^{2n}\right)-n\right).$$

Аналогично предыдущему получаем

$$s_n\left(\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^2-(-1)^n\alpha^{2n+2}}{1+\alpha^2}-n\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left((-1)^{n+1}\alpha^{2n}\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}-n\right)$$

и в итоге

$$s_n\left(\frac{1}{\beta}\right)=(-1)^{n+1}\frac{1+\sqrt{5}}{10}\alpha^{2n}+\frac{1+\sqrt{5}}{10}-\frac{n}{\sqrt{5}}. \quad (1.26)$$

23. Посмотрим, как ведет себя сумма $s_n(x)$ при фиксированном x и неограниченно возрастающем n.

Переходя в равенстве (1.23) к пределу по n, мы получаем

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} ((\alpha x + \alpha^2 x^2 + \ldots + \alpha^n x^n) - (\beta x + \beta^2 x^2 + \ldots + \beta^n x^n)) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{n\to\infty} (\alpha x + \alpha^2 x^2 + \ldots + \alpha^n x^n) - \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{n\to\infty} (\beta x + \beta^2 x^2 + \ldots + \beta^n x^n).$$

Здесь под знаками двух последних пределов стоят суммы геометрических прогрессий. Поэтому сами пределы являются суммами соответствующих бесконечных геометрических прогрессий. Но, как известно, для того, чтобы можно было говорить о сумме бесконечной геометрической прогрессии, необходимо и достаточно, чтобы ее знаменатель по абсолютной величине был меньше единицы. В имеющихся у нас прогрессиях знаменатели равны αx и βx. Здесь $|\alpha| > |\beta|$. Поэтому из $|\alpha x| < 1$ следует $|\beta x| < 1$. Таким образом, выполнение неравенства $|\alpha x| < 1$ будет обеспечивать существование всех интересующих нас в данный момент пределов.

Итак, предел

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) \tag{1.27}$$

существует, если $|x| < \frac{1}{\alpha}$. Обозначим этот предел через $s(x)$. Для его вычисления мы можем воспользоваться формулой (1.24).

Заметим для этого, что на основании сказанного в п. 20

$$u_n \leqq \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + 1.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} u_n x^{n+2} \leqq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + 1\right) x^{n+2} = \frac{x^2}{\sqrt{5}} \lim_{n\to\infty} (\alpha x)^n + \lim_{n\to\infty} x^{n+2}.$$

Ввиду $|\alpha x| < 1$ должно быть и $|x| < 1$, так что оба написанных предела равны нулю. По тем же причинам и

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1}x^{n+1} = 0.$$

Следовательно, переходя в формуле (1.24) к пределу по n при неограниченном возрастании n, мы получаем

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x - u_n x^{n+2} - u_{n+1}x^{n+1}}{1 - x - x^2} =$$

$$= \frac{1}{1 - x - x^2}\left(x - \lim_{n\to\infty} u_n x^{n+2} - \lim_{n\to\infty} u_{n+1}x^{n+1}\right) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Найденный результат можно переписать в развернутом виде как

$$u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n + \ldots = \frac{x}{1 - x - x^2}. \quad (1.28)$$

Придавая переменной x те или иные значения, мы будем получать различные конкретные формулы. Например, полагая $x = \frac{1}{2}$, обнаружим, что

$$\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2^2} + \ldots + \frac{u_n}{2^n} + \ldots = 2.$$

24. Формулу (1.28) можно получить также при помощи несколько иных рассуждений.

Напишем

$$u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n + \ldots = s(x) \quad (1.29)$$

(помня при этом, что выражение $s(x)$ имеет смысл лишь при $|x| < \frac{1}{\alpha}$) и умножим это равенство почленно на x и на x^2:

$$u_1 x^2 + u_2 x^3 + \ldots + u_n x^{n+1} + \ldots = x s(x), \quad (1.30)$$

$$u_1 x^3 + u_2 x^4 + \ldots + u_n x^{n+2} + \ldots = x^2 s(x). \quad (1.31)$$

Вычитая из равенства (1.29) оба равенства (1.30) и (1.31), мы после приведения подобных членов получим

$$u_1 x + (u_2 - u_1)x^2 + (u_3 - u_2 - u_1)x^3 +$$
$$+ (u_4 - u_3 - u_2)x^4 + \ldots + (u_n - u_{n-1} - u_{n-2})x^n + \ldots =$$
$$= (1 - x - x^2)s(x).$$

Все заключенные в скобках выражения в левой части равенства, кроме первого, очевидно, равны нулю, и это равенство превращается в

$$x = (1 - x - x^2)\, s(x),$$

откуда и следует (1.28).

25. Говоря о числе Фибоначчи u_n, мы пока все время предполагали, что его номер n является целым положительным числом. Однако основное рекуррентное соотношение, определяющее числа Фибоначчи, может быть записано и как

$$u_{n-2} = u_n - u_{n-1}. \tag{1.32}$$

При этом оно будет служить для выражения чисел Фибоначчи с меньшими номерами через числа с бо́льшими.

Полагая последовательно в (1.32) $n = 2, 1, 0, -1, \ldots$, мы можем вычислить

$$u_0 = 0, \qquad u_{-1} = 1, \qquad u_{-2} = -1, \qquad u_{-3} = 2, \ldots$$

и вообще, как легко убедиться (пусть читатель убедится сам!),

$$u_{-n} = (-1)^{n+1} u_n. \tag{1.33}$$

Это простое выражение числа Фибоначчи с произвольным целым номером позволяет сводить все задачи о таких числах Фибоначчи к задачам об обычных числах Фибоначчи с натуральными номерами.

Например, для вычисления суммы n «первых назад» чисел Фибоначчи

$$u_{-1} + u_{-2} + \ldots + u_{-n}$$

достаточно переписать ее в соответствии с (1.33):

$$u_1 - u_2 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n,$$

и вспомнить формулу (1.6):

$$u_{-1} + u_{-2} + \ldots + u_{-n} = (-1)^{n+1} u_{n-1} + 1 = -u_{-n+1} + 1.$$

Опирающееся на основное рекуррентное соотношение индуктивное рассуждение о числах Фибоначчи типа переходов «от n и $n+1$ к $n+2$» можно в связи с соотношением (1.32) проводить по схеме «от n и

$n-1$ к $n-2$». В частности, таким образом без труда доказывается для любых целых n и m важная формула (1.8)

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}.$$

26. Основные уравнения для чисел α и β:

$$\alpha^{n+2} = \alpha^n + \alpha^{n+1},$$
$$\beta^{n+2} = \beta^n + \beta^{n+1},$$

справедливы не только для положительных, но и для любых целых значений n (для дробных значений n эти равенства тоже в известном смысле остаются в силе, но мы на этом не будем останавливаться). Отсюда легко получить, что формула Бине

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$$

имеет место для любого целого n.

Заметим в заключение, что и результат п. 17 можно (по индукции «назад») перенести на отрицательные значения номера:

$$\alpha^{-n} = u_{-n}\alpha + u_{-n-1}. \tag{1.34}$$

Это равенство переписывается как

$$(-1)^n\beta^n = (-1)^n u_n \frac{1}{\beta} + (-1)^n u_{n+1},$$

т. е.

$$\beta^{n+1} = u_{n+1}\beta + u_n.$$

Кроме того, (1.34) можно представить в виде

$$\alpha^{-n} = (-1)^{n-1} u_n\alpha + (-1)^n u_{n+1},$$

т. е.

$$(-1)^n \alpha^{-n} = u_{n+1} - u_n\alpha,$$

или, иначе,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \alpha = (-1)^n \alpha^{-n}\frac{1}{u_n}. \tag{1.35}$$

27. Числа Фибоначчи могут составить основу своеобразной «фибоначчиевой» системы счисления, т. е., представления любого натурального числа a в виде некоторой последовательности «цифр» $\varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_r$. Эта последовательность может быть получена следующим (индуктивным!) образом.

Отнимем от заданного числа $a = a_0$ наибольшее из не превосходящих его чисел Фибоначчи u_n и, написав цифру $\varphi_1 = 1$ и разность $a_1 = a_0 - u_n$, будем считать это первым шагом нашего построения.

Предположим, что k шагов построения уже выполнены, в результате чего появилась последовательность цифр

$$\varphi_1 \ldots \varphi_k, \tag{1.36}$$

состоящая из нулей и единиц, а также некоторое число a_k. Тогда $k+1$-й шаг построения будет состоять в следующем: сравним число a_k с числом Фибоначчи u_{n-k}, и если окажется $a_k < u_{n-k}$, то припишем к последовательности (1.36) $\varphi_{k+1} = 0$ и фиксируем число $a_{k+1} = a_k$, а если будет $a_k \geqq u_{n-k}$, то припишем к (1.36) $\varphi_{k+1} = 1$ и положим $a_{k+1} = a_k - u_{n-k}$. Мы выполним $n-1$ шагов этого процесса, в результате чего, очевидно, придем к $n-1$-членной последовательности (1.36) и числу $a_{n-1} = 0$.

Фактически описанный процесс является последовательным выделением из числа a слагаемых, равных наибольшим возможным числам Фибоначчи, т. е. представлением a в виде суммы различных чисел Фибоначчи.

Окончательную соответствующую числу a последовательность (1.36) будем называть его *фибоначчиевой записью* и обозначать через $\Phi(a)$. Составляющие $\Phi(a)$ нули и единицы назовем *фибоначчиевыми цифрами* числа a. Ясно, что если $\Phi(a) = \varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}$, то

$$a = u_n\varphi_1 + u_{n-1}\varphi_2 + \ldots + u_2\varphi_{n-1}. \tag{1.37}$$

Поясним сказанное на примере. Пусть $a = 19$. Тогда

$$\begin{aligned}
&u_n = 13 \ (n=7), && \varphi_1 = 1, && a_1 = 19 - 13 = 6;\\
&u_6 = 8 > a_1, && \varphi_2 = 0, && a_2 = a_1 = 6;\\
&u_5 = 5 \leqq a_2, && \varphi_3 = 1, && a_3 = 6 - 5 = 1;\\
&u_4 = 3 > a_3, && \varphi_4 = 0, && a_4 = a_3 = 1:\\
&u_3 = 2 > a_4, && \varphi_5 = 0, && a_5 = a_4 = 1;\\
&u_2 = 1 \leqq a_5, && \varphi_6 = 1, && a_6 = 1 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\Phi(19) = 101001$, и $19 = u_7 + u_5 + u_2$.

Ясно, что каждое число a имеет единственную фибоначчиеву запись $\Phi(a)$. Однако не всякая начинающаяся с единицы последовательность нулей и единиц обязана быть фибоначчиевой записью $\Phi(a)$ для некоторого числа a. Например, в $\Phi(a)$ не могут стоять две единицы подряд.

Действительно, пусть в $\Phi(a)$ две единицы встречаются подряд после некоторого нуля: $\varphi_k = 0$, $\varphi_{k+1} = \varphi_{k+2} = 1$. Это значит, что

$$a_{k-1} < u_{n-k+1}, \tag{1.38}$$

$$a_{k-1} = a_k, \quad a_k - u_{n-k} = a_{k+1}, \quad a_{k+1} \geqq u_{n-k-1}.$$

Но почленное сложение всех составляющих вторую строку соотношений дает нам

$$a_{k-1} \geqq u_{n-k} + u_{n-k-1} = u_{n-k+1},$$

что противоречит (1.38).

Значит, две единицы подряд могли бы встретиться в $\Phi(a)$ разве лишь в том случае, когда впереди них вовсе не было бы нулей, т. е. было бы $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$. Но тогда по определению процесса $a_1 = a_0 - u_n \geqq u_{n-1}$, так что

$$a_0 \geqq u_n + u_{n-1} = u_{n+1},$$

и u_n не является наибольшим числом Фибоначчи, не превосходящим a.

Вместе с тем ограничение, заключающееся в отсутствии двух стоящих рядом единиц, оказывается уже достаточным: всякая последовательность из $n-1$ нулей и единиц, начинающаяся с единицы и не содержащая двух единиц подряд, есть фибоначчиева запись $\Phi(a)$ некоторого числа a, для которого

$$u_n \leqq a < u_{n+1}. \tag{1.39}$$

В этом можно убедиться, воспользовавшись, например, результатом задачи о прыгуне из п. 6. Пусть имеется $n-1$ клетка, по которым прыгун прыгает доступными для него способами (т. е. на соседнюю клетку или через клетку). После выполнения прыжков все клетки, в которых прыгун побывал, помечаются нулями, а остальные клетки — единицами. Так как всего возможно u_{n-1} способов выполнения прыжков, различных способов пометок будет тоже u_{n-1}.

Если к каждой из них приписать впереди единицу, то мы получим запись, которая может быть фибоначчиевым значением для числа a, удовлетворяющего (1.38). Но таких чисел ровно u_{n-1}, и каждое из них должно иметь свою запись; поэтому каждой записи соответствует хотя бы одно число.

§ 2. ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫЕ СВОЙСТВА ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ

1. Рассмотрим теперь некоторые свойства чисел Фибоначчи, касающиеся их делимости.

Теорема. *Если n делится на m, то и u_n делится на u_m.*

Доказательство. Пусть n делится на m, т. е. $n = mk$. Будем вести доказательство индукцией по k.

Для $k = 1$ $n = m$, так что в этом случае u_n делится на u_m очевидным образом. Предположим теперь, что u_{mk} делится на u_m, и рассмотрим $u_{m(k+1)}$. Но $u_{m(k+1)} = u_{mk+m}$ и на основании (1.8)

$$u_{m\,(k+1)} = u_{mk-1}u_m + u_{mk}u_{m+1}.$$

Первое слагаемое правой части написанного равенства, очевидно, делится на u_m. Второе же ее слагаемое кратно u_{mk}, т. е., по индуктивному предположению, тоже делится на u_m. Значит, на u_m делится и их сумма, т. е. $u_{m(k+1)}$. Этим теорема доказана.

2. Возьмем теперь некоторое число m. Если существует хотя бы одно число Фибоначчи u_n, делящееся на m, то таких делящихся на m чисел Фибоначчи можно найти сколь угодно много. Ими будут, кроме u_n, например, числа u_{2n}, u_{3n}, u_{4n}, ...

Интересно поэтому выяснить, можно ли по заданному числу m найти хотя бы одно делящееся на него число Фибоначчи. Оказывается, это сделать можно.

Пусть $\bar{k}$ обозначает остаток от деления k на m. Будем выписывать последовательность пар таких остатков от деления чисел Фибоначчи на m:

$$\langle \bar{u}_1, \bar{u}_2\rangle, \langle \bar{u}_2, \bar{u}_3\rangle, \langle \bar{u}_3, \bar{u}_4\rangle, \ldots, \langle \bar{u}_n, \bar{u}_{n+1}\rangle, \ldots \qquad (2.1)$$

Если считать пары $\langle a_1, b_1\rangle$ и $\langle a_2, b_2\rangle$ равными при $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$, то число всех различных пар

остатков от деления на m равно m^2. Поэтому если в последовательности (2.1) взять m^2+1 первых членов, то среди них обязательно окажутся равные.

Пусть $\langle \bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}\rangle$ — первая пара, которая повторится в последовательности (2.1). Покажем, что этой парой является пара $\langle 1, 1\rangle$. В самом деле, предположим обратное, т. е. что первой повторившейся парой окажется пара $\langle \bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}\rangle$, где $k > 1$. Найдем в (2.1) пару $\langle \bar{u}_l, \bar{u}_{l+1}\rangle$ $(l > k)$, равную паре $\langle \bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}\rangle$. Так как $u_{l-1} = u_{l+1} - u_l$ и $u_{k-1} = u_{k+1} - u_k$, а $\bar{u}_{l+1} = \bar{u}_{k+1}$ и $\bar{u}_l = \bar{u}_k$, остатки от деления u_{l-1} и u_{k-1} на m также должны быть равны, т. е. $\bar{u}_{l-1} = \bar{u}_{k-1}$. Однако из этого следует, что и $\langle \bar{u}_{k-1}, \bar{u}_k\rangle = \langle \bar{u}_{l-1}, \bar{u}_l\rangle$, а пара $\langle \bar{u}_{k-1}, \bar{u}_k\rangle$ встречается в последовательности (2.1) раньше, чем $\langle \bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}\rangle$, и поэтому $\langle \bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}\rangle$ не является *первой* повторившейся парой, что противоречит нашему предположению. Значит, предположение, что $k > 1$, неверно, а это означает, что $k = 1$.

Итак, $\langle 1, 1\rangle$ есть первая повторившаяся в последовательности (2.1) пара. Пусть она повторилась на t-м месте (в соответствии с установленным ранее мы можем считать, что $1 < t \leq m^2 + 1$), т. е.

$$\langle \bar{u}_t, \bar{u}_{t+1}\rangle = \langle 1, 1\rangle.$$

Это значит, что и u_t и u_{t+1} при делении на m дают в остатках единицы. Значит, их разность делится на m нацело. Но

$$u_{t+1} - u_t = u_{t-1},$$

так что на m делится $t-1$-е число Фибоначчи.

Мы доказали, таким образом, следующую теорему.

Теорема. *Каково бы ни было целое число m, среди первых $m^2 - 1$ чисел Фибоначчи найдется хотя бы одно, делящееся на m.*

Заметим, что доказанная теорема не утверждает ничего о том, *какое именно* число Фибоначчи разделится на m. Она говорит только, что первое число Фибоначчи, делящееся на m, не должно быть особенно большим. Далее мы еще вернемся к этому вопросу.

Из того, что $\langle 1, 1\rangle$ есть первая повторившаяся пара в последовательности (2.1), вытекает, что начиная с

$\bar{u}_i$, последовательность остатков повторяется как бы сначала. Это значит, что последовательность остатков оказывается периодической. Например, при $m = 4$ этот период в последовательности остатков будет следующим:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 0. \qquad (2.2)$$

Длина периода в данном случае равна 6. Таким образом, если число n имеет вид $6k+1$, $6k+2$ или $6k+5$, то u_n при делении на 4 дает в остатке единицу, если n имеет вид $6k+3$, то 2, а если $6k+4$, то 3.

3. Большой интерес представляет вопрос об арифметической природе чисел Фибоначчи, об их делителях. Докажем, что при n составном и отличном от 4 u_n есть составное число.

Действительно, для такого n можно написать $n = n_1 n_2$, где $1 < n_1 < n$, $1 < n_2 < n$ и либо $n_1 > 2$, либо $n_2 > 2$. Пусть для определенности $n_1 > 2$. Тогда ввиду только что доказанной теоремы u_n делится на u_{n_1}, причем $1 < u_{n_1} < u_n$, а это и означает, что u_n — составное число.

4. Прежде чем продолжать изучение чисел Фибоначчи, напомним читателю несколько простейших сведений из теории чисел.

Сначала укажем процесс нахождения наибольшего общего делителя чисел a и b.

Разделим a на b с остатком. Пусть при этом частное равно q_0, а остаток r_1. Очевидно,

$$a = bq_0 + r_1 \quad \text{и} \quad 0 \leqq r_1 < b.$$

Заметим, что при $a < b$ будет $q_0 = 0$.

Разделим, далее, b на r_1 и обозначим частное через q_1, а остаток через r_2. Очевидно, $b = r_1 q_1 + r_2$ и $0 \leqq r_2 < r_1$. Так как $r_1 < b$, должно быть $q_1 \neq 0$. Затем, разделив r_1 на r_2, найдем такие $q_2 \neq 0$ и r_3, что $r_1 = q_2 r_2 + r_3$ и $0 \leqq r_3 < r_2$. Будем поступать так до тех пор, пока этот процесс можно продолжать.

Рано или поздно наш процесс должен оборваться, так как все целые положительные числа r_1, r_2, r_3, ... различны, и каждое из них меньше b. Значит, число

их не превосходит b, и процесс должен закончиться не позднее b-го шага. Оборваться же он может лишь на том, что некоторое деление окажется произведенным нацело, т. е. остаток окажется равным нулю, а дальше делить на него будет уже нельзя.

Описанный процесс носит название *алгорифма Евклида*. В результате его применения к числам a и b мы получаем такую последовательность равенств:

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1, \\ b &= r_1q_1 + r_2, \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3, \\ &\cdots\cdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_{n-1} + r_n, \\ r_{n-1} &= r_nq_n. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Рассмотрим последний отличный от нуля член в последовательности a, b, r_1, r_2, ..., r_n и именно его возьмем в качестве r_n. Разумеется, в частности, им может оказаться и число b (для единообразия можно положить $b = r_0$). Очевидно, r_{n-1} делится на r_n. Возьмем теперь в (2.3) предпоследнее равенство. В правой его части оба слагаемых делятся на r_n, а потому и r_{n-2} делится на r_n. Аналогичным образом убеждаемся последовательно (индукция!) в том, что на r_n делятся r_{n-3}, r_{n-4}, ... и, наконец, b и a. Итак, r_n является общим делителем a и b. Покажем, что r_n есть наибольший общий делитель a и b. Для этого нам достаточно показать, что всякий общий делитель a и b будет делить и r_n.

Пусть d — некоторый общий делитель a и b. Из первого равенства (2.3) усматриваем, что d должно делить r_1. Но тогда на основании второго равенства (2.3) d делит r_2. Аналогично (индукция!) доказываем, что d делит r_3, ..., r_{n-1} и, наконец, r_n.

Мы доказали, таким образом, что алгорифм Евклида, примененный к натуральным числам a и b, действительно приводит к наибольшему общему делителю этих чисел. Этот наибольший делитель чисел a и b мы будем обозначать через (a, b).

Очевидно, a делится на b тогда и только тогда, когда $(a, b) = b$.

В качестве примера найдем $(u_{20}, u_{15}) = (6765, 610)$:

$$6765 = 610 \cdot 11 + 55,$$
$$610 = 55 \cdot 11 + 5,$$
$$55 = 5 \cdot 11.$$

Итак,

$$(u_{20}, u_{15}) = 5 = u_5.$$

То, что наибольшим общим делителем двух чисел Фибоначчи вновь оказалось число Фибоначчи, не случайно. В дальнейшем будет доказано, что так бывает всегда.

5. Процесс, аналогичный алгорифму Евклида, встречается в геометрии при нахождении общей меры двух соизмеримых отрезков. В самом деле, рассмотрим два отрезка: один длиной a и другой длиной b. Вычтем из первого отрезка второй столько раз, сколько это возможно (если $b > a$, то, очевидно, мы этого не сможем сделать ни разу), и обозначим длину остатка через r_1. Очевидно, $r_1 < b$. Вычтем теперь из отрезка длиной b отрезок длиной r_1 столько раз, сколько возможно, и обозначим получившийся вновь остаток через r_2. Поступая таким же образом дальше, мы получим последовательность остатков, длины которых, очевидно, убывают. До этого места сходство с алгорифмом Евклида, как мы видим, полное.

Далее, однако, обнаруживается важное отличие описываемого геометрического процесса от алгорифма Евклида для натуральных чисел: последовательность остатков, получаемых при вычитании отрезков, может и не оборваться, так как процесс такого вычитания окажется возможным вести неопределенно долго. Это будет, очевидно, в случае несоизмеримости взятых первоначально отрезков.

6. Установим несколько простых свойств наибольшего общего делителя двух чисел.

(a, bc) делится на (a, b). Действительно, b, а потому и bc, делится на (a, b); a делится на (a, b) очевидным образом. Значит, по доказанному в п. 4 и (a, bc) делится на (a, b).

7. $(ac, bc) = (a, b)c$.

Доказательство. Пусть равенства (2.3) описывают процесс нахождения (a, b). Умножив почленно каждое из этих равенств на c, мы, как легко проверить, получим систему равенств, соответствующую алгорифму Евклида, примененному к числам ac и bc. Последний ненулевой остаток при этом будет равен $r_n c$, т. е. $(a, b)c$.

8. Если $(a, c) = 1$, то $(a, bc) = (a, b)$. В самом деле, (a, bc) на основании п. 6 является делителем (ab, bc). Но

$$(ab, bc) = (a, c)\, b = 1 \cdot b = b$$

ввиду п. 7. Таким образом, b делится на (a, bc). С другой стороны, (a, bc) есть делитель a. Значит, (a, bc) ввиду доказанного в п. 4 делит и (a, b). А так как по п. 6 и (a, b) делит (a, bc), мы получаем $(a, b) = (a, bc)$.

Пусть bc делится на a. Это значит, что $(a, bc) = a$. Если при этом $(a, c) = 1$, то по предыдущему $(a, b) = a$, т. е. b делится на a.

Если p — простое число, то любое a либо делится на p, либо взаимно просто с ним. Следовательно, по предыдущему, если произведение двух чисел делится на простое p, то хотя бы один из сомножителей должен делиться на это p. Очевидным образом по индукции это утверждение распространяется на случай произведения произвольного числа множителей.

9. В качестве примера, который будет полезен в дальнейшем, рассмотрим один из вопросов о делимости биномиальных коэффициентов.

Теорема. *Если p — простое, а $k \neq 0$ и $k \neq p$, то C_p^k делится на p.*

Доказательство. Согласно сказанному в п. 14 § 1

$$C_p^k = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}.$$

Так как в действительности эта дробь равна целому числу, ее числитель должен делиться на знаменатель. Но каждый из сомножителей знаменателя меньше, чем p, и потому на p не делится. Следовательно, так как p — простое, по предыдущему на p не делится и их произведение, т. е. весь знаменатель. Значит, знаменатель взаимно прост с p.

Рассмотрим числитель дроби как произведение двух чисел p и $(p-1) \ldots (p-k+1)$. Это произведение делится на знаменатель. Так как p взаимно просто со знаменателем, на него делится второй сомножитель: $(p-1)\ldots(p-k+1)$. Пусть $(p-1)\ldots(p-k+1) = t \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$. Тогда $C_p^k = tp$, а это и требовалось.

10. Если c делится на b, то $(a, b) = (a + c, b)$.

Доказательство. Пусть применение алгорифма Евклида к числам a и b приводит к системе равенств (2.3). Применим этот алгорифм к числам

$a + c$ и b. Так как c делится на b по условию, то мы можем положить $c = c_1 b$; первый шаг алгорифма дает нам равенство

$$a + c = (q_0 + c_1)\, b + r_1.$$

Все дальнейшие шаги этого алгорифма дадут нам последовательно второе, третье и т. д. равенства системы (2.3). Последним отличным от нуля остатком по-прежнему является r_n, а это и значит, что $(a, b) = (a + c, b)$.

Полезным упражнением для читателя будет доказательство этой теоремы только на основании результатов пп. 6—8, т. е. без повторного обращения к понятию алгорифма Евклида и системе (2.3).

11. Теорема. *Соседние числа Фибоначчи взаимно просты.*

Доказательство. Пусть вопреки утверждению теоремы u_n и u_{n+1} имеют некоторый общий делитель $d > 1$. Тогда и их разность $u_{n+1} - u_n$ будет делиться на d. А так как $u_{n+1} - u_n = u_{n-1}$, на d должно делиться и u_{n-1}. Аналогично показываем (индукция!), что на d будут делиться и u_{n-2}, и u_{n-3}, и т. д. и, наконец, u_1. Но $u_1 = 1$, и поэтому на $d > 1$ делиться не может. Полученное противоречие доказывает теорему.

12. Теорема. *Имеет место равенство*

$$(u_m, u_n) = u_{(m, n)}.$$

Доказательство. Пусть для определенности $m > n$. Применим к числам m и n алгорифм Евклида:

$$\begin{aligned}
m &= nq_0 + r_1, && \text{где } 0 \leqq r_1 < n,\\
n &= r_1 q_1 + r_2, && \text{где } 0 \leqq r_2 < r_1,\\
r_1 &= r_2 q_2 + r_3, && \text{где } 0 \leqq r_3 < r_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_{t-2} &= r_{t-1} q_{t-1} + r_t, && \text{где } 0 \leqq r_t < r_{t-1},\\
r_{t-1} &= r_t q_t.
\end{aligned}$$

Как нам уже известно, r_t есть наибольший общий делитель m и n.

Итак, $m = nq_0 + r_1$; значит,

$$(u_m, u_n) = (u_{nq_0 + r_1}, u_n),$$

или

$$(u_m, u_n) = (u_{nq_0-1}u_{r_1} + u_{nq_0}u_{r_1+1}, u_n),$$

или, на основании пп. 1 и 10,

$$(u_m, u_n) = (u_{nq_0-1}u_{r_1}, u_n),$$

или ввиду пп. 11 и 8

$$(u_m, u_n) = (u_{r_1}, u_n).$$

Аналогично доказываем, что

$$(u_{r_1}, u_n) = (u_{r_2}, u_{r_1}),$$
$$(u_{r_2}, u_{r_1}) = (u_{r_3}, u_{r_2}),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(u_{r_{t-1}}, u_{r_{t-2}}) = (u_{r_t}, u_{r_{t-1}}).$$

Сопоставляя все эти равенства, получаем

$$(u_m, u_n) = (u_{r_t}, u_{r_{t-1}}),$$

а так как r_{t-1} делится на r_t, так что и $u_{r_{t-1}}$ делится на u_{r_t}, должно быть $(u_{r_t}, u_{r_{t-1}}) = u_{r_t}$. Замечая, наконец, что $r_t = (m, n)$, мы получаем требуемое.

В частности, из только что доказанного следует теорема, обратная теореме п. 1: если u_n делится на u_m, то n делится на m. В самом деле, если u_n делится на u_m, то, как отмечалось в п. 4,

$$(u_n, u_m) = u_m. \tag{2.4}$$

Но, по доказанному,

$$(u_n, u_m) = u_{(n, m)}. \tag{2.5}$$

Сопоставляя формулы (2.4) и (2.5), мы получаем

$$u_m = u_{(n, m)},$$

т. е. $m = (n, m)$, а это и означает, что n делится на m.

13. Объединяя теорему п. 1 и следствие теоремы п. 12, мы имеем: *u_n делится на u_m тогда и только тогда, когда n делится на m.*

Ввиду этого о делимости чисел Фибоначчи можно судить, рассматривая делимость их номеров.

Найдем, например, несколько «признаков делимости» чисел Фибоначчи. Под признаком делимости мы понимаем здесь признак, по которому можно определить, делится или нет то или иное число Фибоначчи на некоторое данное число.

Число Фибоначчи четно тогда и только тогда, когда его номер делится на 3.

Число Фибоначчи делится на 3 тогда и только тогда, когда его номер делится на 4.

Число Фибоначчи делится на 4 тогда и только тогда, когда его номер делится на 6.

Число Фибоначчи делится на 5 тогда и только тогда, когда его номер делится на 5.

Число Фибоначчи делится на 7 тогда и только тогда, когда его номер делится на 8.

Число Фибоначчи делится на 16 тогда и только тогда, когда его номер делится на 12.

Доказательства всех этих признаков делимости и всех других, подобных им, легко могут быть проведены читателем при помощи предложения, приведенного в начале этого пункта, и рассмотрения соответственно третьего, четвертого, пятого, шестого, восьмого, двенадцатого и т. д. чисел Фибоначчи.

Пусть заодно читатель докажет, что не существует чисел Фибоначчи, дающих при делении на 8 в остатке 4, а также, что нет нечетных чисел Фибоначчи, делящихся на 17.

14. На протяжении этого параграфа нам часто придется высказывать суждения типа «числа a и b при делении на m дают один и тот же остаток», или, что, в сущности, то же самое, «разность $a - b$ делится на m».

Нам нужно иметь возможность легко и уверенно оперировать с этими суждениями и переходить от одних суждений такого типа к другим. Поэтому мы будем, как это принято в теории чисел, записывать такие суждения формально, сделав их тем самым предметом некоторого «исчисления».

Определение. Числа a и b называются *сравнимыми по модулю* m, если при делении на m числа a и b дают один и тот же остаток, или если $a - b$ делится на m. Сравнимость a и b по модулю m записывается как

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Очевидно, если a делится на m, то

$$a \equiv 0 \pmod{m},$$

и наоборот.

15. Сравнения по одному и тому же модулю можно подобно равенствам почленно складывать.

Лемма. *Если*

$$a_1 \equiv b_1 \pmod m,$$
$$a_2 \equiv b_2 \pmod m,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n \equiv b_n \pmod m,$$

то

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \ldots + b_n \pmod m.$$

Доказательство. Из условия следует, что на m делится каждая из разностей

$$a_1 - b_1, \quad a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n,$$

а потому и их сумма:

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_n - b_n),$$

т. е.

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_n),$$

а это и означает требуемое сравнение.

16. В п. 9 мы установили, что при простом p и $0 < k < p$

$$C_p^k \equiv 0 \pmod p. \tag{2.6}$$

Это можно записать также как

$$C_p^{k+1} \equiv 0 \pmod p \tag{2.7}$$

при $0 \leqq k < p - 1$.

Значит, при $0 < k < p - 1$ справедливы оба сравнения (2.6) и (2.7). Сложив их, мы получим

$$C_p^k + C_p^{k+1} \equiv 0 \pmod p,$$

или

$$C_{p+1}^{k+1} \equiv 0 \pmod p.$$

Иными словами, при простом p в $p+1$-й строке треугольника Паскаля все члены, кроме четырех (по два крайних справа и слева), делятся на p.

Нетрудно проверить также, что

$$C_{p+1}^0 \equiv C_{p+1}^1 \equiv C_{p+1}^p \equiv C_{p+1}^{p+1} \equiv 1 \pmod p.$$

17. Сравнение (2.6) можно переписать как

$$C_{p-1}^{k-1} + C_{p-1}^k \equiv 0 \pmod p,$$

или

$$C_{p-1}^{k-1} \equiv -C_{p-1}^k \pmod p.$$

Это имеет место при любом $k = 1, 2, \ldots, p-1$. Значит,

$$C_{p-1}^0 \equiv -C_{p-1}^1 \equiv C_{p-1}^2 \equiv -C_{p-1}^3 \equiv \ldots \equiv C_{p-1}^{p-1} \pmod{p}.$$

Так как $C_{p-1}^0 = 1$, последнее сравнение означает, что члены $p-1$-й строки треугольника Паскаля с нечетными номерами сравнимы по модулю p с 1, а члены с четными номерами с -1.

18. Сравнения по одному и тому же модулю можно не только почленно складывать, но и почленно перемножать.

Лемма. *Если*

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv b_1 \pmod{m}, \\ a_2 &\equiv b_2 \pmod{m}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_n &\equiv b_n \pmod{m}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

то

$$a_1 a_2 \ldots a_n \equiv b_1 b_2 \ldots b_n \pmod{m}. \tag{2.9}$$

Доказательство будем вести индукцией по n.

При $n = 1$ лемма тривиальна.

Предположим, что для некоторого n лемма верна (т. е. что из (2.8) следует (2.9)) и присоединим к ее условиям сравнение

$$a_{n+1} \equiv b_{n+1} \pmod{m}. \tag{2.10}$$

Сравнения (2.9) и (2.10) соответственно означают, что разности $a_1 a_2 \ldots a_n - b_1 b_2 \ldots b_n$ и $a_{n+1} - b_{n+1}$ делятся на m. Следовательно,

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \ldots a_n &= b_1 b_2 \ldots b_n + mT, \\ a_{n+1} &= b_{n+1} + mt, \end{aligned}$$

где T и t — целые числа. Перемножая полученные равенства, мы имеем

$$a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} = b_1 b_2 \ldots b_n b_{n+1} + m(b_1 b_2 \ldots b_n t + b_{n+1} T + mTt).$$

Справа в скобках стоит целое число, поэтому

$$a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} \equiv b_1 b_2 \ldots b_n b_{n+1} \pmod{m},$$

а это и требовалось.

Из доказанной леммы вытекает, что обе части сравнения можно возводить в любую целую неотрицательную степень.

Как тривиальный частный случай можно получить следующий факт: произведение чисел вида $4t + 1$ тоже имеет вид $4t + 1$. В самом деле, пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — данные числа.

По условию,

$$a_1 \equiv 1 \pmod{4}, \quad a_2 \equiv 1 \pmod{4}, \ldots, \quad a_n \equiv 1 \pmod{4}.$$

Перемножая эти сравнения, мы получим, что

$$a_1 a_2 \ldots a_n \equiv 1 \pmod{4}.$$

19. Правила сокращения сравнений также подобны правилам сокращения равенств: равенства можно сокращать на любое число, отличное от нуля, а сравнения — на любое число, взаимно простое с модулем.

Лемма. *Если*

$$ac \equiv bc \pmod{m}, \tag{2.11}$$

причем $(c, m) = 1$, *то*

$$a \equiv b \pmod{m}. \tag{2.12}$$

Доказательство. Сравнение (2.11) означает, что разность $ac - bc$ делится на m. Но

$$ac - bc = (a - b)\, c,$$

а так как $(c, m) = 1$, на m должна делиться разность $a - b$, что и означает (2.12).

20. Во многих вопросах оказывается полезным следующее утверждение, называемое «малой теоремой Ферма».

Теорема. *Если* p — *простое число, и* a *не делится на* p, *то*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Доказательство. Рассмотрим числа

$$a,\ 2a,\ \ldots,\ (p-1)\, a. \tag{2.13}$$

Никакие два из них не сравнимы по модулю p. Действительно, из

$$ka \equiv la \pmod{p}$$

ввиду $(a, p) = 1$ по п. 19 следовало бы, что

$$k \equiv l \pmod{p},$$

т. е. что $k - l$ делится на p, чего при $0 < k,\ l < p$ и $k \neq l$ быть не может.

Кроме того, ни одно из рассматриваемых чисел не делится на p.

Значит, все числа (2.13) при делении на p дают различные остатки $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$, каждый из которых отличен от нуля. Но чисел (2.13) $p - 1$ штук, а ненулевых остатков от деления на p тоже $p - 1$ штук, и все они различны. Следовательно, при делении чисел (2.13) на p с остатком (т. е. среди чисел $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$) каждый из остатков 1, 2, ..., $p - 1$ встретится ровно по одному разу. Итак, мы имеем

$$\begin{aligned} a &\equiv r_1 \pmod{p}, \\ 2a &\equiv r_2 \pmod{p}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (p-1)\, a &\equiv r_{p-1} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Перемножая все эти сравнения почленно, мы получаем

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1)\, a^{p-1} \equiv r_1 r_2 \ldots r_{p-1} \pmod{p}. \tag{2.14}$$

Но, как уже было замечено, числа $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ — это те же числа 1, 2, ..., $p-1$, только выписанные в каком-то ином порядке. Следовательно, сравнение (2.14) можно переписать как

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1)\, a^{p-1} \equiv 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1) \pmod{p}. \quad (2.15)$$

Заметим, наконец, что произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1)$ взаимно просто с p, и потому в сравнении (2.15) можно произвести сокращение:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

что и требовалось.

21. Из сказанного в п. 2 следует, что среди делителей чисел Фибоначчи имеются все вообще числа. Сейчас мы убедимся в том, что можно выделить некоторые классы чисел Фибоначчи, обладающие делителями довольно конкретного вида.

Например, имеет место следующая теорема *):

Теорема. *Если число Фибоначчи имеет нечетный номер, то все его нечетные делители имеют вид* $4t+1$.

Доказательство. Формула (1.10) (см. п. 9 § 1) в случае нечетного n дает нам

$$u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1} + 1,$$

откуда

$$u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = u_{n-1}(u_{n-1} + u_n) - u_n^2 =$$
$$= u_{n-1}^2 + u_{n-1}u_n - u_n^2 = -1. \quad (2.16)$$

Пусть p — простой делитель u_n, причем $p \neq 2$. Из (2.16) следует, что $u_{n-1}^2 + 1$ делится на u_n, и потому на p. Следовательно,

$$u_{n-1}^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Возводя почленно это сравнение в степень $\frac{p-1}{2}$, мы получим

$$\left(u_{n-1}^2\right)^{\frac{p-1}{2}} = u_{n-1}^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Далее, $(u_{n-1}, u_n) = 1$, так что u_{n-1} не делится на p, и мы оказываемся в условиях «малой теоремы Ферма», согласно которой

$$u_{n-1}^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Но тогда и

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p},$$

*) Автор признателен ленинградскому любителю чисел Фибоначчи тов. Фрейштадту, обратившему его внимание на этот факт.

т. е. $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$. Следовательно, число $\frac{p-1}{2}$ — четное, а это означает, что p имеет вид $4t+1$.

Итак, все простые нечетные делители u_n имеют вид $4t+1$. Следовательно, ввиду сказанного в конце п. 18, такой же вид должны иметь и все их произведения, т. е. все вообще (см. п. 5 § 1) нечетные делители u_n.

22. Согласно определению сравнения все числа, дающие при делении на m один и тот же остаток, сравнимы между собой по модулю m. Наоборот, если числа при делении на m дают различные остатки, то они несравнимы.

Остатком от деления на m может быть одно из m чисел: $1, 2, \ldots, m-1$. Следовательно, несравнимых друг с другом по модулю m чисел может быть не более, чем m.

Пусть m нечетно; возьмем числа

$$-\frac{m-1}{2}, -\frac{m-3}{2}, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, \frac{m-3}{2}, \frac{m-1}{2}. \tag{2.17}$$

Этих чисел m штук, и никакие два из них не сравнимы по модулю m (иначе их разность, которая по абсолютной величине меньше, чем m, и отлична от нуля, делилась бы на m). Следовательно, каждое число сравнимо по модулю m с одним из чисел списка (2.17). Числа (2.17) называются *абсолютно наименьшими вычетами по модулю m*. Очевидно, абсолютная величина каждого из абсолютно наименьших вычетов меньше половины модуля.

Заметим, что систему абсолютно наименьших вычетов можно построить и для четного m. Она будет выглядеть несколько иначе, чем (2.17):

$$-\frac{m-2}{2}, -\frac{m-4}{2}, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{m-2}{2}, \frac{m}{2}.$$

Система абсолютно наименьших вычетов для четных m нам не будет нужна.

23. Пусть m — нечетное число, не делящееся на 5. Составим последовательность абсолютно наименьших вычетов по модулю m чисел $5, 2\cdot5, 3\cdot5, \ldots, \frac{m-1}{2}\cdot5$. Например, при $m = 21$ этой последовательностью будет

$$5, 10, -6, -1, 4, 9, -7, -2, 3, 8.$$

Выясним чередование положительных и отрицательных абсолютно наименьших вычетов в последовательностях такого рода при различных m. Оказывается, что оно будет зависеть от последней цифры числа m (в десятичной записи).

Лемма. *Если $m = 10t+1$, то последовательность абсолютно наименьших вычетов устроена следующим образом:*

t положительных, t отрицательных, t положительных, t отрицательных, t положительных.

Если $m = 10t + 3$, *то схема чередования знаков будет такой:*

t *положительных,* t *отрицательных,* t *положительных,* $t+1$ *отрицательных,* t *положительных.*

Если $m = 10t + 7$, *то в последовательности будет* t *положительных,* $t+1$ *отрицательных,* $t+1$ *положительных,* t *отрицательных,* $t+1$ *положительных.*

Если $m = 10t + 9$, *то мы получим* t *положительных,* $t+1$ *отрицательных,* $t+1$ *положительных,* $t+1$ *отрицательных,* $t+1$ *положительных.*

Доказательство проводится непосредственным подсчетом порознь для каждого из четырех сформулированных утверждений. Мы ограничимся доказательством первого из них, предоставив читателю разбор остальных.

Итак, пусть $m = 10t + 1$. Очевидно, при $k \leqq t$ будет $5k < \frac{m-1}{2}$, так что все такие числа $5k$ уже являются абсолютно наименьшими вычетами по модулю m. Количество их равно t, а последним будет $5t$. Так как $5(t+1) > \frac{m-1}{2}$, следующий абсолютно наименьший вычет будет отрицательным (он будет равен $-5t+4$). Прибавляя к нему последовательно одну за другой $t-1$ пятерок, мы получим всего серию из t отрицательных чисел, которая заканчивается на -1. Затем будет положительное 4, а за ним — еще $t-1$ положительных чисел (т. е. до $4 + (t-1)\cdot 5 = 5t-1$ включительно), после чего снова появляются отрицательные числа (от $-5t+3$ до -2; всего t штук). Наконец, от 3 до $5t-2$ мы получаем завершающие t положительных членов последовательности.

Этим требуемое доказано.

В сущности, основным итогом этой леммы для нас будет то обстоятельство, что при $m = 10t \pm 1$ в последовательности абсолютно наименьших вычетов имеется четное число отрицательных членов, а при $m = 10t \pm 3$ — нечетное.

24. Лемма. *Если* p — *простое число вида* $5t \pm 1$, *то* $5^{\frac{p-1}{2}} - 1$ *делится на* p.

Если p — *простое число вида* $5t \pm 2$, *то* $5^{\frac{p-1}{2}} + 1$ *делится на* p.

Доказательство. Мы имеем

$$5 \equiv \varepsilon_1 r_1 \pmod{p},$$

$$2 \cdot 5 \equiv \varepsilon_2 r_2 \pmod{p},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{p-1}{2} \cdot 5 \equiv \varepsilon_{\frac{p-1}{2}} r_{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

где $\varepsilon_k r_k$ — абсолютно наименьший вычет $k \cdot 5$ по модулю p, причем $r_k > 0$, а $\varepsilon_k = \pm 1$ и указывает на знак вычета.

Перемножая все эти сравнения, мы получаем

$$1\cdot 2\cdot \ldots \cdot \frac{p-1}{2}\cdot 5^{\frac{p-1}{2}} \equiv \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{\frac{p-1}{2}} r_1 r_2 \ldots r_{\frac{p-1}{2}} \pmod p. \tag{2.18}$$

Дальше ведется рассуждение, напоминающее то, которое было проведено в ходе доказательства малой теоремы Ферма.

Каждое из положительных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{p-1}{2}}$ не превосходит числа $\frac{p-1}{2}$.

Если бы среди этих чисел нашлись одинаковые: $r_k = r_l$ $\left(1 \leqq k, l \leqq \frac{p-1}{2}\right)$, то было бы $5k \equiv \pm 5l \pmod p$, а ввиду того, что $(5, p) = 1$, и $k \equiv \pm l \pmod p$. Но этого не может быть, так как $-p < k - l < k + l < p$ и $k - l \neq 0$. Следовательно, все числа $r_1, r_2, \ldots, r_{\frac{p-1}{2}}$ различны. Значит, этими числами будут $1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$, расположенные в некотором порядке. Все они взаимно просты с модулем, и поэтому мы можем сравнение (2.18) сократить на произведение $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot \frac{p-1}{2}$. В результате мы получаем $5^{\frac{p-1}{2}} \equiv \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{\frac{p-1}{2}} \pmod p$.

Согласно лемме п. 23 в произведении $\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{\frac{p-1}{2}}$ число сомножителей, равных -1, четно при $p = 10t + 1$ (ввиду нечетности p это равносильно тому, что p имеет вид $5t \pm 1$) и нечетно при $p = 10t \pm 3$ (т. е. p имеет вид $5t \pm 2$).

Отсюда непосредственно получаются оба утверждения леммы.

25. Теперь мы можем доказать основное свойство делимости чисел Фибоначчи на простое число.

Т е о р е м а. *Если простое число p имеет вид $5t \pm 1$, то u_{p-1} делится на p. Если p имеет вид $5t \pm 2$, то u_{p+1} делится на p.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть p имеет вид $5t \pm 1$. По формуле Бине мы имеем

$$u_{p-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{p-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{p-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{1}{2^{p-1}}\left(1 + C_{p-1}^1\sqrt{5} + C_{p-1}^2(\sqrt{5})^2 + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + C_{p-1}^{p-1}(\sqrt{5})^{p-1} - \right.$$

$$\left. - 1 + C_{p-1}^1\sqrt{5} - C_{p-1}^2(\sqrt{5})^2 + \ldots - C_{p-1}^{p-1}(\sqrt{5})^{p-1}\right),$$

или, после очевидных упрощений,

$$u_{p-1}=\frac{1}{2^{p-2}}\left(C_{p-1}^{1}+C_{p-1}^{3}5+C_{p-1}^{5}5^{2}+\ \dots\ +C_{p-1}^{p-2}5^{\frac{p-3}{2}}\right).$$

В силу сказанного в п. 17 все перечисленные здесь биномиальные коэффициенты сравнимы по модулю p с -1. Поэтому

$$2^{p-1}u_{p-1}\equiv -2\left(1+5+\ \dots\ +5^{\frac{p-3}{2}}\right)\pmod p.$$

Суммируя встретившуюся нам геометрическую прогрессию и учитывая, что 2^{p-1} по модулю p сравнимо с единицей, получим

$$u_{p-1}\equiv -\frac{5^{\frac{p-1}{2}}-1}{2}\pmod p.$$

Но по предыдущему числитель стоящей справа дроби делится на p. Так как $(p, 2)=1$, и вся дробь делится на p. Значит, и u_{p-1} делится на p, так что первое утверждение теоремы доказано.

Обратимся к случаю, когда p имеет вид $5l\pm 2$. Тогда, применяя, как и выше, формулу Бине, мы получим

$$u_{p+1}=\frac{1}{2^{p}}\left(C_{p+1}^{1}+C_{p+1}^{3}5+C_{p+1}^{5}5^{2}+\dots+C_{p+1}^{p}5^{\frac{p-1}{2}}\right)\pmod p.$$

По п. 16 все члены в скобках, кроме двух крайних, делятся на p, а $C_{p+1}^{1}=C_{p+1}^{p}$ при делении на p дает в остатке единицу. Поэтому

$$u_{p+1}\equiv\frac{1}{2}\left(1+5^{\frac{p-1}{2}}\right)\pmod p.$$

Применение в данном случае предыдущей леммы дает нам, что u_{p+1} делится на p.

26. Пусть u_n делится на некоторое простое число p, причем ни одно из чисел Фибоначчи, меньших u_n, не делится на p. В этом случае мы будем называть число p *собственным делителем* u_n. Например, 11 есть собственный делитель u_{10}, 17 — собственный делитель u_9 и т. д.

Оказывается, что всякое число Фибоначчи, кроме u_1, u_2, u_6 и u_{12}, обладает хотя бы одним собственным делителем.

Доказательство этого факта потребует довольно сложных рассуждений и займет всю оставшуюся часть этого параграфа. При этом мы попутно установим ряд дальнейших свойств чисел Фибоначчи, связанных с их делимостью.

27. Начнем с некоторых общих теоретико-числовых соображений.

Установленный нами в п. 8 важный факт о делимости произведения на простое число позволяет доказать теорему, которая иногда называется «основной теоремой арифметики».

Теорема. *Всякое натуральное число разлагается на простые множители лишь одним способом.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что возможность такого разложения является весьма простым фактом и была устаиовлена нами еще в п. 5 § 1 при помощи непосредственного индуктивного рассуждения.

Для доказательства единствеиности разложения рассмотрим два возможных разложения числа a иа простые множители:

$$p_1 p_2 \cdots p_k = a = q_1 q_2 \cdots q_l.$$

Будем для определенности считать, что $k \leqq l$. Здесь правая часть должиа делиться на p_1. Поэтому согласно сказаиному в п. 8 иа p_1 должен делиться хотя бы один из входящих в нее сомножителей. Пусть, для определеиности, q_1 делится на p_1. Так как число q_1 простое, это возможно лишь при $p_1 = q_1$. Произведя сокращение, мы получим

$$p_2 \cdots p_k = q_2 \cdots q_l.$$

Повторяя это рассуждеиие k раз (индукция!), т. е. до исчерпания всех сомножителей слева, мы придем в итоге к равенству

$$1 = q_{k+1} \cdots q_l.$$

Но последиее возможио лишь при $q_{k+1} = \ldots = q_l = 1$, т. е. простые сомножители $q_{k+1}, \ldots, q_l$ должиы отсутствовать.

Теорема доказаиа.

28. Объединяя в разложеиии a иа простые сомножители все одинаковые сомиожители в степени, мы получим

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}. \tag{2.19}$$

Это представление натуральиого числа a называется его *каноническим разложением.*

Иногда ради формальных удобств мы будем приписывать к каноническому разложению числа еще произвольиые иовые простые сомиожители с нулевыми показателями.

29. Как легко проверить, для того чтобы число a с каноническим разложением (2.19) делилось на

$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}, \tag{2.20}$$

необходимо и достаточно, чтобы было

$$\beta_1 \leqq \alpha_1, \quad \beta_2 \leqq \alpha_2, \ldots, \beta_k \leqq \alpha_k.$$

(В частиости, если некоторое $\alpha_i = 0$, то должио быть и $\beta_i = 0$.)

Теперь мы можем по-новому описать наибольший общий делитель двух или иескольких чисел.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольиый набор натуральных чисел, и $p_1, \ldots, p_k$ — все такие простые числа, что каждое из них

является делителем хотя бы одного из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Напишем канонические разложения для $a_1, a_2 \ldots, a_n$:

$$\begin{aligned} a_1 &= p_1^{\alpha_{11}} p_2^{\alpha_{12}} \ldots p_k^{\alpha_{1k}}, \\ a_2 &= p_1^{\alpha_{21}} p_2^{\alpha_{22}} \ldots p_k^{\alpha_{2k}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= p_1^{\alpha_{n1}} p_2^{\alpha_{n2}} \ldots p_k^{\alpha_{nk}} \end{aligned} \tag{2.21}$$

(здесь все показатели $\alpha_{ij} \geqq 0$). Очевидно, всякий общий делитель d чисел $a_1, \ldots, a_n$ может иметь в своем каноническом разложении лишь простые множители из числа $p_1, \ldots, p_k$:

$$d = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \ldots p_k^{\delta_k}.$$

При этом каждый показатель δ_i не должен превосходить каждого из соответствующих ему показателей $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}$, входящих в разложения $a_1, a_2, \ldots, a_n$ при p_i:

$$\delta_i \leqq \alpha_{1i}, \quad \delta_i \leqq \alpha_{2i}, \ldots, \quad \delta_i \leqq \alpha_{ni}. \tag{2.22}$$

Если этот общий делитель d является *наибольшим* общим делителем, то показатели δ_i должны быть наибольшими из всех чисел, удовлетворяющих соответствующим неравенствам (2.22). Но это значит, что каждое δ_i должно быть просто наименьшим из соответствующего набора чисел $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}$. Это можно записать так:

$$\delta_i = \min \{\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}\}.$$

Наибольший общий делитель чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обозначается, как и в случае двух чисел, через $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

30. В некотором смысле двойственным к понятию наибольшего общего делителя является понятие наименьшего общего кратного.

Очевидно, всякое число, делящееся на числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с каноническими разложениями (2.21), должно иметь в своем каноническом разложении все простые сомножители, входящие хотя бы в одно из разложений (2.21), т. е. числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Кроме того, в каноническое разложение общего кратного могут входить еще какие-либо «посторонние» множители. Таким образом, каноническое разложение всякого общего кратного m чисел $a_1, a_2, \ldots, \ldots, a_n$ должно иметь вид

$$m = p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \ldots p_k^{\mu_k} Q,$$

где через Q обозначено произведение всех «посторонних» простых множителей. При этом, очевидно, для любого $i = 1, \ldots, k$ должно быть

$$\mu_i \geqq \alpha_{1i}, \quad \mu_i \geqq \alpha_{2i}, \ldots, \quad \mu_i \geqq \alpha_{ni}. \tag{2.23}$$

Если m является *наименьшим* общим кратным чисел $a_1, a_2, \ldots, \ldots, a_n$, то, очевидно, множитель Q должен отсутствовать совсем (т. е. он должен быть равен единице), а все показатели μ_i долж-

ны быть наименьшими из тех, которые удовлетворяют неравенствам (2.23). Но последнее означает, что каждое μ_i должно быть просто наибольшим числом среди $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}$:

$$\mu_i = \max\{\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}\}.$$

Наименьшее общее кратное чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обозначается через $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

31. Докажем вспомогательную лемму.

Лемма. *Каковы бы ни были числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,

$$\begin{aligned}\max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = {} & \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - \\ & - \min\{\alpha_1, \alpha_2\} - \min\{\alpha_1, \alpha_3\} - \ldots - \min\{\alpha_{n-1}, \alpha_n\} + \\ & + \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} + \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\} + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \pm \min\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}\end{aligned} \tag{2.24}$$

(здесь во второй строке стоят все минимумы из двух чисел, в третьей — все минимумы из трех и т. д.).

Доказательство. Не нарушая общности, мы можем с самого начала считать, что числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ расположены в порядке невозрастания:

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_n.$$

Тогда

$$\max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = \alpha_1.$$

Вычислим значение левой части (2.24). Подсчитаем для этого, сколько раз (алгебраически) входит в нее каждое из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. При этом в случае равенства двух чисел α_i и α_j мы будем в качестве минимального писать то, какое имеет больший номер (очевидно, это чисто формальное соглашение не влияет на величины рассматриваемых нами выражений).

Заметим сначала, что α_1 является самым большим из рассматриваемых нами чисел. Поэтому оно входит только в первую строку правой части (2.24) и притом ровно один раз. Значит, в правой части (2.24) коэффициент при α_1 равен единице.

Рассмотрим теперь вхождение в правую часть (2.24) некоторого $\alpha_i (i > 1)$. В первую строку оно войдет один раз. Во вторую и последующие строки до i-й включительно оно войдет лишь от тех минимумов, в которых вместе с α_i стоит сочетание чисел с номерами, меньшими, чем i. Для каждой j-й строки ($j \leqq i$) число таких вхождений будет равно числу сочетаний из $i-1$ чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}$ по $j-1$ т. е. C_{i-1}^{j-1} (см. п. 14 § 1). Общее число вхождений α_i, таким образом, будет равно

$$1 - C_{i-1}^1 + C_{i-1}^2 - \ldots \pm C_{i-1}^{i-1}.$$

На основании п. 13 § 1 это выражение равно нулю.

Следовательно, правая часть (2.24) равна α_1, т. е. левой части, и лемма доказана.

32. Воспользуемся доказанным для удобного описания наименьшего общего кратного нескольких чисел.

Теорема.

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{a_1 a_2 \ldots a_n (a_1, a_2, a_3)(a_1, a_2, a_4) \ldots}{(a_1, a_2)(a_1, a_3) \ldots (a_{n-1}, a_n)(a_1, a_2, a_3, a_4) \ldots}. \quad (2.25)$$

(Здесь в числителе стоит произведение исходных чисел, наибольших общих делителей всевозможных их троек, пятерок и т. д., а в знаменателе — произведение всех наибольших общих делителей пар исходных чисел, их четверок и т. д.)

Доказательство. Пусть p — произвольный простой сомножитель, входящий в канонические разложения некоторых из $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Обозначим через α_i показатель, с которым p входит в каноническое разложение a_i. Тогда в левую часть (2.25) он согласно п. 30 войдет с показателем

$$\max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}, \quad (2.26)$$

а в правую согласно п. 29 — с показателем

$$\begin{aligned}&\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - \\ &- \min\{\alpha_1, \alpha_2\} - \min\{\alpha_1, \alpha_3\} - \ldots - \min\{\alpha_{n-1}, \alpha_n\} + \\ &+ \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} + \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\pm \min\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

На основании же предыдущей леммы выражения (2.26) и (2.27) равны друг другу.

Таким образом, в канонических разложениях правой и левой частей (2.25) имеются одни и те же простые сомножители и входят они с одними и теми же показателями.

33. Вернемся к изучению делимости чисел Фибоначчи.

Лемма.

$$u_{mn-1} - u_{n-1}^m \quad \textit{делится на} \quad u_n^2. \quad (2.28)$$

Доказательство ведется индукцией по m.

При $m = 1$ делимое обращается в нуль, и потому делится на u_n^2. Предположим теперь, что делимость (2.28) справедлива, и рассмотрим

$$u_{(m+1)n-1} - u_{n-1}^{m+1} = (u_{mn-1}u_{n-1} + u_{mn}u_n) - u_{n-1}^{m+1}.$$

Но по индуктивному предположению

$$u_{mn-1} \equiv u_{n-1}^m \pmod{u_n^2}.$$

Следовательно,

$$u_{(m+1)n-1} - u_{n-1}^{m+1} \equiv u_{n-1}^m u_{n-1} + u_{mn}u_n - u_{n-1}^{m+1} \pmod{u_n^2}. \quad (2.29)$$

Как вытекает из п. 1, u_{mn} делится на u_n; поэтому

$$u_{mn}u_n \equiv 0 \pmod{u_n^2},$$

и (2.29) превращается в

$$u_{(m+1)n-1} - u_{n-1}^{m+1} \equiv 0 \pmod{u_n^2}.$$

Индуктивный переход обоснован; теорема доказана.

34. Лемма.

$$u_{mn} - u_{n+1}^m + u_{n-1}^m \text{ делится на } u_n^3. \tag{2.30}$$

Доказательство ведется индукцией по m.

При $m = 1$ делимое обращается в нуль и поэтому делится на u_n^3.

Предположим, что делимость (2.30) имеет место, и рассмотрим

$$u_{(m+1)n} - u_{n+1}^{m+1} + u_{n-1}^{m+1} = u_{mn-1}u_n + u_{mn}u_{n+1} - u_{n+1}^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}.$$

Но по индуктивному предположению

$$u_{mn} \equiv u_{n+1}^m - u_{n-1}^m \pmod{u_n^3}.$$

Следовательно,

$$u_{(m+1)n} - u_{n+1}^{m+1} + u_{n-1}^{m+1} \equiv$$
$$\equiv u_{mn-1}u_n + u_{n+1}\left(u_{n+1}^m - u_{n-1}^m\right) - u_{n+1}^{m+1} + u_{n-1}^{m+1} \pmod{u_n^3},$$

или

$$u_{(m+1)n} - u_{n+1}^{m+1} + u_{n-1}^{m+1} \equiv u_{mn-1}u_n - u_{n-1}^m\left(u_{n+1} - u_{n-1}\right) \pmod{u_n^3}$$

или

$$u_{(m+1)n} - u_{n+1}^{m+1} + u_{n-1}^{m+1} \equiv u_n\left(u_{mn-1} - u_{n-1}^m\right) \pmod{u_n^3}.$$

По предыдущему стоящая справа разность делится на u_n^2. Поэтому вся правая часть делится на u_n^3, т. е. сравнима с нулем по модулю u_n^3, а это и требовалось.

35. Пусть p — простое число. Как показано в п. 1, u_{np} делится на u_n. Поэтому при переходе от u_n к u_{np}, во-первых, могут появиться новые простые делители, а во-вторых, могут повышаться показатели при старых простых делителях члена u_n. Мы докажем сейчас теорему, из которой будет следовать, что из всех простых делителей u_n показатель может повыситься разве лишь у p. Если $p \neq 2$, то показатель при p увеличивается лишь на единицу, а если $p = 2$, то не более, чем на 2.

Теорема. *Если q — простой делитель u_n, отличный от p, то $\dfrac{u_{np}}{u_n}$ не делится на q.*

Если p — простой нечетный делитель u_n, то $\frac{u_{np}}{u_n}$ делится на p, но не делится на p^2.

Если u_n делится на 4, то $\frac{u_{2n}}{u_n}$ делится на 2, но не делится на 4.

Если u_n делится на 2, но не делится на 4, то $\frac{u_{2n}}{u_n}$ делится на 4, но не делится на 8.

Доказательство. Полагая в предыдущей лемме $m = p$, мы получим, что

$$u_{np} - u_{n+1}^p + u_{n-1}^p \quad \text{делится на} \quad u_n^3.$$

Но u_{np} *делится на* u_n согласно п. 1, а

$$u_{n+1}^p - u_{n-1}^p = (u_{n+1} - u_{n-1})\left(u_{n+1}^{p-1} + u_{n+1}^{p-2}u_{n-1} + \ldots + u_{n-1}^{p-1}\right) = \\ = u_n\left(u_{n+1}^{p-1} + u_{n+1}^{p-2}u_{n-1} + \ldots + u_{n-1}^{p-1}\right).$$

Следовательно, разность

$$\frac{u_{np}}{u_n} - \left(u_{n+1}^{p-1} + u_{n+1}^{p-2}u_{n-1} + \ldots + u_{n-1}^{p-1}\right) \qquad (2.31)$$

делится на u_n^2.

Во-первых, отсюда следует, что разность (2.31) делится на u_n. Это значит, что

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv u_{n+1}^{p-1} + u_{n+1}^{p-2}u_{n-1} + \ldots + u_{n-1}^{p-1} \pmod{u_n}. \qquad (2.32)$$

Но, очевидно,

$$u_{n+1} \equiv u_{n-1} \pmod{u_n}.$$

Поэтому из (2.32) следует, что

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv u_{n+1}^{p-1} + u_{n+1}^{p-1} + \ldots + u_{n+1}^{p-1} \pmod{u_n}.$$

Так как справа имеется p слагаемых, должно быть

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv pu_{n+1}^{p-1} \pmod{u_n}.$$

Следовательно, всякий общий делитель чисел $\frac{u_{np}}{u_n}$ и u_n должен делить также p, и наоборот. Это значит, что

$$\left(\frac{u_{np}}{u_n},\ u_n\right) = (p,\ u_n).$$

Если теперь q — простой делитель u_n, отличный от p, то (p, u_n), равный 1 или p, не делится на q.

Следовательно, и $\left(\frac{u_{np}}{u_n}, u_n\right)$, равный 1 или p, тоже не делится на q. Но так как u_n делится на q, на него не может делиться $\frac{u_{np}}{u_n}$, и первая часть теоремы доказана.

Во-вторых, если p — делитель u_n, то из делимости разности (2.31) на u_n^2 следует, что

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv u_{n+1}^{p-1} + u_{n+1}^{p-2}u_{n-1} + \ldots + u_{n-1}^{p-1} \pmod{p^2}.$$

Разделим u_{n+1} и u_{n-1} дважды последовательно на p с остатком. Пусть

$$u_{n+1} \equiv r_1 p + r' \pmod{p^2},$$
$$u_{n-1} \equiv r_2 p + r'' \pmod{p^2},$$

где $0 \leqq r_1, r_2, r', r'' < p$ (поскольку разность $u_{n+1} - u_{n-1}$ равна u_n, т. е. делится на p, остатки r' и r'' должны быть равны; положим поэтому $r' = r'' = r$); при этом $r \neq 0$, так как ни u_{n-1}, ни u_{n+1} на p не делятся).

Тогда

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv (r_1 p + r)^{p-1} + (r_1 p + r)^{p-2}(r_2 p + r) + \ldots$$
$$\ldots + (r_1 p + r)^{p-k}(r_2 p + r)^{k-1} + \ldots + (r_2 p + r)^{p-1} \pmod{p^2}.$$

Раскроем справа скобки и отбросим слагаемые, делящиеся на p^2. k-й член

$$(r_1 p + r)^{p-k}(r_2 p + r)^{k-1}$$

даст нам при этом

$$C_{p-k}^1 r_1 p r^{p-k-1} r^{k-1} + r^{p-k} C_{k-1}^1 r_2 p r^{k-2} + r^{p-k} r^{k-1},$$

или

$$(p-k)\, p r_1 r^{p-2} + (k-1)\, p r_2 r^{p-2} + r^{p-1}.$$

Суммируя это выражение по всем членам, т. е. по $k = 1, \ldots, p$, мы получим

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv \frac{p(p-1)}{2} p r_1 r^{p-2} + \frac{p(p-1)}{2} p r_2 r^{p-2} + p r^{p-1} \pmod{p^2}. \tag{2.33}$$

Если $p \neq 2$, то $\frac{p-1}{2}$ является целым числом. Поэтому первые два слагаемых в (2.33) справа делятся на p^2, и мы получаем

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv p r^{p-1} \pmod{p^2}.$$

Наконец, по малой теореме Ферма (см. п. 20) $r^{p-1}-1$ делится на p, и, значит, $pr^{p-1}-p$ делится на p^2. Учитывая это, мы окончательно получаем

$$\frac{u_{np}}{u_n} \equiv p \pmod{p^2}.$$

Таким образом, $\frac{u_{np}}{u_n}$ при делении на p^2 дает в остатке p, т. е. делится на p, но не делится на p^2, и мы доказали вторую часть теоремы.

Пусть теперь $p = 2$. Тогда (2.33) можно переписать как

$$\frac{u_{2n}}{u_n} \equiv 2(r_1 + r_2 + r) \pmod 4. \tag{2.34}$$

Если u_n делится на 4, то из последовательности остатков (2.2) видно, что в этом случае как u_{n-1}, так и u_{n+1} при делении на 4 дают в остатке 1. Следовательно, в этом случае $r_1 = r_2 = 0$, а $r = 1$, и (2.34) превращается в

$$\frac{u_{2n}}{u_n} \equiv 2 \pmod 4.$$

Это доказывает третью часть теоремы.

Наконец, пусть u_n не делится на 4. Последовательность (2.2) показывает, что теперь $r_1 = 1$, $r_2 = 0$ и $r = 1$. Поэтому (2.34) превращается в

$$\frac{u_{2n}}{u_n} \equiv 0 \pmod 4.$$

Нам остается показать, что $\frac{u_{2n}}{u_n}$ не делится на 8. Но если бы это было так, то член u_{2n} делился бы на 16. Но тогда согласно сказанному в п. 13 $2n$ должно делиться на 12, т. е. n должно делиться на 6. Но отсюда в свою очередь следует, что u_n должно делиться на u_6, т. е. на 8, а это противоречит предположенному (именно тому, что u_n не делится даже на 4).

Теорема доказана полностью.

36. Теперь мы можем непосредственно заняться доказательством существования собственных делителей у чисел Фибоначчи.

Теорема. *Всякое число Фибоначчи, за исключением* u_1, u_2, u_6 *и* u_{12}, *имеет хотя бы один собственный делитель.*

Доказательство. Рассмотрим число Фибоначчи u_n. Пусть каноническое разложение числа n будет

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}.$$

Возьмем все числа Фибоначчи

$$u_{\frac{n}{p_1}},\ u_{\frac{n}{p_2}},\ \dots,\ u_{\frac{n}{p_k}} \tag{2.35}$$

и составим их наименьшее общее кратное M. Согласно п. 32

$$M=\frac{u_{\frac{n}{p_1}}u_{\frac{n}{p_2}}\dots u_{\frac{n}{p_k}}\left(u_{\frac{n}{p_1}},u_{\frac{n}{p_2}},u_{\frac{n}{p_3}}\right)\dots}{\left(u_{\frac{n}{p_1}},u_{\frac{n}{p_2}}\right)\dots\left(u_{\frac{n}{p_{k-1}}},u_{\frac{n}{p_k}}\right)\left(u_{\frac{n}{p_1}},u_{\frac{n}{p_2}},u_{\frac{n}{p_3}},u_{\frac{n}{p_4}}\right)\dots}.$$

Но при любых r и различных $i_1, i_2, \dots, i_r$

$$\left(u_{\frac{n}{p_{i_1}}},u_{\frac{n}{p_{i_2}}},\dots,u_{\frac{n}{p_{i_r}}}\right)=u\left(\frac{n}{p_{i_1}},\frac{n}{p_{i_2}},\dots,\frac{n}{p_{i_r}}\right)=$$

$$=u_{\frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_r}}}.$$

Поэтому

$$M=\frac{u_{\frac{n}{p_1}}u_{\frac{n}{p_2}}\dots u_{\frac{n}{p_k}}u_{\frac{n}{p_1p_2p_3}}\dots}{u_{\frac{n}{p_1p_2}}u_{\frac{n}{p_1p_3}}\dots u_{\frac{n}{p_{k-1}p_k}}u_{\frac{n}{p_1p_2p_3p_4}}\dots}.$$

Но u_n делится на все числа $u_{\frac{n}{p_1}}, u_{\frac{n}{p_2}}, \dots, u_{\frac{n}{p_k}}$, а потому и на их наименьшее общее кратное M:

$$u_n = Mt.$$

Всякий простой делитель M делит одно из чисел (2.35) и потому является несобственным делителем u_n. Следовательно, все собственные делители u_n должны делить t. Согласно теореме п. 35 из простых несобственных делителей u_n в t могут входить разве лишь $p_1, p_2, \dots, p_k$, причем каждое из этих чисел входит в t с показателем, не большим единицы, за исключением двойки, которая может входить с показателем 2.

Доказав неравенство

$$t > \overset{\times}{2}p_1p_2\dots p_k$$

(крестик под двойкой здесь и далее означает, что эта двойка фактически присутствует лишь в том случае, когда среди чисел $p_1, p_2, \dots, p_k$ уже имеется одна двойка), мы установим существование собственных делителей у числа Фибоначчи u_n.

Итак, докажем, что

$$t=\frac{u_nu_{\frac{n}{p_1p_2}}u_{\frac{n}{p_1p_3}}\dots u_{\frac{n}{p_{k-1}p_k}}u_{\frac{n}{p_1p_2p_3p_4}}\dots}{u_{\frac{n}{p_1}}u_{\frac{n}{p_2}}\dots u_{\frac{n}{p_k}}u_{\frac{n}{p_1p_2p_3}}\dots}>\overset{\times}{2}p_1p_2\dots p_k.$$

В п. 21 § 1 было показано, что

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{n-\frac{1}{n}} \leqq u_n \leqq \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{n+\frac{1}{n}}.$$

Поэтому если все числа Фибоначчи в числителе дроби заменить на $\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{n-\frac{1}{n}}$, а в знаменателе — на $\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{n+\frac{1}{n}}$, то дробь только уменьшится. Доказав требуемое неравенство для новой дроби, мы установим даже несколько больше, чем нужно.

Выполнив указанные замены и произведя сокращение на $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2^k-1}$, мы получим

$$\frac{\alpha^{n-\frac{1}{n}}\alpha^{\frac{n}{p_1p_2}-\frac{p_1p_2}{n}}\dots\alpha^{\frac{n}{p_{k-1}p_k}-\frac{p_{k-1}p_k}{n}}\alpha^{\frac{n}{p_1p_2p_3p_4}-\frac{p_1p_2p_3p_4}{n}}\dots}{\alpha^{\frac{n}{p_1}+\frac{p_1}{n}}\alpha^{\frac{n}{p_2}+\frac{p_2}{n}}\dots\alpha^{\frac{n}{p_k}+\frac{p_k}{n}}\alpha^{\frac{n}{p_1p_2p_3}+\frac{p_1p_2p_3}{n}}\dots} > \underset{\times}{2}p_1p_2\dots p_k,$$

или

$$\frac{\alpha^{n\left(1-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}-\dots-\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_1p_2}+\dots+\frac{1}{p_{k-1}p_k}-\frac{1}{p_1p_2p_3}-\dots\right)}}{\alpha^{\frac{1}{n}(1+p_1+p_2+\dots+p_k+p_1p_2+\dots+p_{k-1}p_k+p_1p_2p_3+\dots)}} > \underset{\times}{2}p_1p_2\dots p_k,$$

или

$$\alpha^{n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)-\frac{1}{n}(1+p_1)(1+p_2)\dots(1+p_k)} > \underset{\times}{2}p_1p_2\dots p_k$$

или, логарифмируя,

$$n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)-$$
$$-\frac{1}{n}(1+p_1)(1+p_2)\dots(1+p_k) > \log_\alpha \underset{\times}{2}p_1p_2\dots p_k$$

Вспоминая каноническое разложение числа n, мы можем это неравенство переписать как

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\,p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\ldots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)-$$
$$-\frac{p_1+1}{p_1^{\alpha_1}}\,\frac{p_2+1}{p_2^{\alpha_2}}\ldots\frac{p_k+1}{p_k^{\alpha_k}}>\log_a 2\underset{\times}{p_1p_2\ldots p_k}.$$

Выражение $p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\ldots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)$ принято обозначать через $\varphi(n)$. Эта функция называется *функцией Эйлера*. Она обладает многими важными и интересными свойствами.

Введя обозначение функции Эйлера, мы получим

$$\varphi(n)>\frac{p_1+1}{p_1^{\alpha_1}}\,\frac{p_2+1}{p_2^{\alpha_2}}\ldots\frac{p_k+1}{p_k^{\alpha_k}}+\log_a 2\underset{\times}{p_1p_2\ldots p_k}. \quad (2.36)$$

Нам осталось проверить, для каких целых положительных значений n написанное неравенство выполняется. Мы будем эти значения называть «хорошими», в отличие от «плохих», для которых (2.36) не имеет места. Очевидно, для хорошнх значений n числа Фибоначчи u_n будут иметь собственные делители. Подчеркнем, что обратное может и не иметь места: справедливость неравенства (2.36) есть лишь достаточное, но отнюдь не необходимое условие наличия у u_n собственных делнтелей. Поэтому числа Фибоначчи с плохнми номерами (а их наберется 10 штук) будут подлежать дополнительной проверке на наличие собственных делнтелей. В результате этой проверки окажется, что шесть чисел нз этого десятка обладают собственными делителями, а четыре (перечисленные в условии теоремы) — нет.

«На глаз» видно, что левая часть (2.36) увеличивается с ростом n существенно быстрее, чем правая. Поэтому с самого начала следует предполагать, что нарушения неравенства (2.36) будут происходить лишь при небольших значениях n. Однако обе части неравенства при общей тенденции к возрастанию изменяются при увеличенин n весьма неправильным образом, и какие-либо непосредственные индуктивные рассуждения едва ли применимы. Следовательно, представляется естественной следующая программа действий. Наметим некоторую схему последовательного перечисления (выписывания) натуральных чисел, при которой от хорошего числа можно переходить только к хорошему. Если на некотором шаге применения этой схемы все получаемые числа будут хорошими, то тогда и все дальнейшие числа также будут хорошими. Следовательно, все плохие числа должны быть перечислены уже до этого шага. Читатель может заметить, что такой способ рассуждений также является однпм из вариантов доказательства по индукции.

Докажем предварительно следующие три утверждения.

1. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ — все простые числа, перечисленные в порядке их возрастания (т. е. $p_1=2$, $p_2=3$ и т. д.). Тогда, если число $n=p_1p_2\ldots p_k$ хорошее и $p_{k+1}>3$, то число $p_1p_2\ldots p_kp_{k+1}$ также хорошее.

Действительно, в данном случае мы имеем

$$n = p_1 p_2 \dots p_k,$$
$$\varphi(n) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1),$$

и по условию должно быть

$$(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1) >$$
$$> \left(1 + \frac{1}{p_1}\right)\left(1 + \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_k}\right) + \log_\alpha 2p_1 p_2 \dots p_k. \quad (2.37)$$

Для того чтобы написать соответствующее неравенство для произведения $p_1 p_2 \dots p_k p_{k+1}$, нужно первое слагаемое правой части (2.37) умножить на $1 + \frac{1}{p_{k+1}}$, что меньше двух, а ко второму добавить $\log_\alpha p_{k+1}$. Но число $p_1 p_2 \dots p_k - 1$ взаимно просто с каждым из простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_k$. Следовательно, каждый его простой делитель q больше любого из этих чисел и потому не меньше, чем p_{k+1}. Значит,

$$p_{k+1} < p_1 p_2 \dots p_k,$$

и тем более

$$p_{k+1} < 2p_1 p_2 \dots p_k,$$

поэтому

$$\log_\alpha p_{k+1} < \log_\alpha 2p_1 p_2 \dots p_k.$$

Следовательно, прибавление ко второму слагаемому $\log_\alpha p_{k+1}$ увеличивает это слагаемое менее, чем вдвое.

Итак, правая часть не может увеличиваться более, чем в два раза. Но левая часть умножается на $p_{k+1} - 1$, что больше 2. Значит, из (2.37) следует

$$(p_1 - 1) \dots (p_k - 1)(p_{k+1} - 1) >$$
$$> \left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_k}\right)\left(1 + \frac{1}{p_{k+1}}\right) + \log_\alpha 2p_1 \dots p_k p_{k+1},$$

и требуемое доказано.

2. Если $n = p_1 p_2 \dots p_k$, где $p_1, p_2, \dots, p_k$ — произвольные различные простые числа, n — хорошее число, а q — произвольное простое число, отличное от $p_1, p_2, \dots, p_k$ и бо́льшее, чем p_1, то $qp_2 \dots p_k$ также является хорошим числом.

В самом деле, в этом случае неравенство (2.36) снова имеет вид (2.37). Произвести здесь замену p_1 на q — все равно, что прибавить к левой части (2.37) произведение $(q - p_1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1)$, а в правой умножить первое слагаемое на

$\dfrac{1+\dfrac{1}{q}}{1+\dfrac{1}{p_1}}$ и прибавить ко второму $\log_\alpha \dfrac{q}{p_1}$. Ввиду того, что $q > p_1$, первое слагаемое от такого умножения может лишь уменьшиться.

Значит, для сохранения в силе неравенства достаточно, чтобы было

$$(q-p_1)(p_2-1)\dots(p_n-1) > \log_\alpha \frac{q}{p_1},$$

и тем более достаточно, чтобы было

$$q - p_1 > \log_\alpha \frac{q}{p_1}. \tag{2.33}$$

Однако при $n \geqq 3$ мы имеем $\alpha > \dfrac{n}{n-1}$, так что

$$1 > \log_\alpha \frac{n}{n-1},$$

и суммирование неравенств такого вида по n от $n = p_1 + 1$ до $n = q$ дает нам (2.38).

3. Если $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ — хорошее число, то $p_1^{\alpha_1+1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ — также хорошее число.

Для доказательства достаточно заметить, что при замене в неравенстве

$$p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\, p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\dots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1) > \frac{p_1+1}{p_1^{\alpha_1}} \frac{p_2+1}{p_2^{\alpha_2}} \dots \frac{p_k+1}{p_k^{\alpha_k}} + \log_\alpha 2p_1p_2\dots p_k$$

показателя α_1 на бо́льшее число $\alpha_1 + 1$, левая часть увеличивается, а правая уменьшается. Следовательно, в результате такого преобразования хорошее число может перейти также лишь в хорошее.

Таким образом, в нашем распоряжении оказываются три операции над числами, три способа переходить от одних чисел к другим, причем от хороших чисел возможен переход только к хорошим же.

Первая из этих операций состоит в построении последовательности 1, 2, 6, 30, 210, ...; вторая заменяет в числе, каноническое разложение которого содержит только первые степени простых, любой простой делитель на бо́льший (для определенности мы будем считать, что замена производится на ближайшее «сверху» простое число), не входящий в каноническое разложение; третья операция увеличивает на единицу некоторый показатель в канонических разложениях. В результате применения этих операций мы, исходя из единицы, перечислим все натуральные числа. Некоторые числа в таком перечислении встретятся более одного

раза, но это обстоятельство не играет для нас никакой роли. Важно, что каждое число хотя бы один раз будет учтено.

Начнем в соответствии со сказанным перечислять натуральные числа. Сначала воспользуемся первой операцией.

Число 1 является плохим, так как для него неравенство (2.36) приобретает вид

$$1 > 1 + \log_a \underset{\times}{2} = 1 + \log_a 1 = 1$$

(произведение натуральных чисел, содержащее нулевое число сомножителей, мы по-прежнему принимаем равным единице), что неверно.

Первая операция в применении к 1 дает 2. Для него неравенство

$$1 > \frac{3}{2} + \log_a \underset{\times}{2} = \frac{3}{2} + \log_a 4$$

неверно, и потому число 2 также плохое.

Плохими будут и следующие числа 6 и 30; для них:

$$\varphi(6) = 2 < \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} + \log_a 12 = 2 + \log_a 12,$$

$$\varphi(30) = 8 < \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} + \log_a 60 \cong 2{,}4 + 8{,}5.$$

Наоборот, число $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ уже оказывается хорошим, ибо

$$\varphi(210) = 48 > \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} + \log_a 420 \cong 2{,}7 + 12{,}5.$$

Поэтому все дальнейшие числа, получаемые применением первой операции, будут хорошими. Будем применять теперь вторую и третью операции.

Применение их к числу 2 дает нам 3 и 4, также плохие числа:

$$\varphi(3) = 2 < \frac{4}{3} + \log_a 3 \cong 1{,}3 + 2{,}3,$$

$$\varphi(4) = 2 < \frac{3}{4} + \log_a 4 \cong 0{,}75 + 2{,}9.$$

Применение операций к числу 3 дает соответственно 5 и 9, причем число 5, как легко проверить, плохое, а 9 хорошее, и дальнейшие преобразования девятки нас не интересуют. Далее, от 5 можно перейти по второй операции к числу 7, а по третьей — к числу 25. Оба эти числа хорошие; поэтому все происходящие от них числа также будут хорошими, и их можно не рассматривать.

Третья операция, примененная к числу 4, приводит к хорошему числу 8.

Итак, применение к двойке в любом числе второй и третьей операций дает нам плохие числа 3, 4 и 5, а все остальные числа будут хорошими.

Обратимся к числу 6. Вторая операция дает плохое число 10, за которым получаются хорошие 20 и 15 и плохое 14. Но за плохим 14 идут хорошие 21 и 22 (вторая операция), а также хорошие 28 и 98 (третья операция).

Третья операция, применяемая к 6, дает плохое 12 и хорошее 18. Но за 12 следуют по третьей операции хорошие 24 и 36, а вторая операция к числу 12 не применяется, так как 12 делится на квадрат простого числа 2.

Наконец, все получаемые из 30 числа (соответственно 210, 42 и 60) хорошие.

Все проведенные рассуждения наглядно описываются следующей схемой (рис. 1).

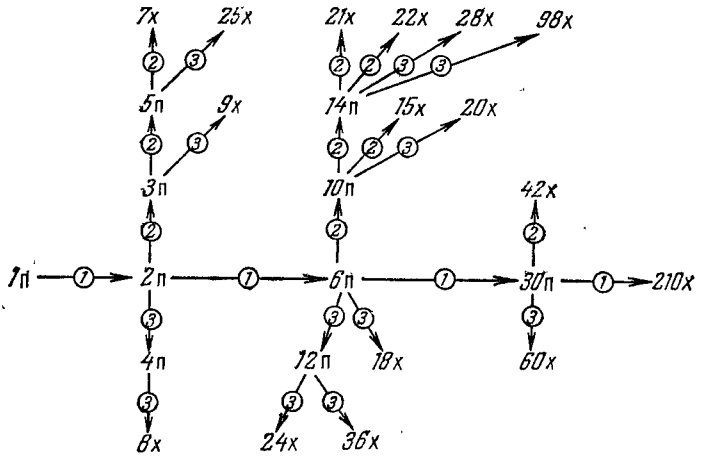

Рис. 1.

В результате мы получили следующий список плохих чисел:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 14, 30.

Соответствующими числами Фибоначчи будут

1, 1, 2, 3, 5, 8, 55, 144, 377, 832040.

Очевидно, собственными делителями u_3, u_4, u_5, u_{10} и u_{14} будут соответственно числа 2, 3, 5, 11 и 29. Можно было бы, выписав все числа Фибоначчи до u_{30} и их разложения на множители, непосредственно убедиться в наличии собственного делителя у u_{30}. Однако в этом нет нужды. Из теоремы п. 25 следует, что u_{30} делится на 31 (ибо 31 есть простое число вида $5t + 1$). С другой стороны, ни $u_6 = 8$, ни $u_{10} = 55$, ни $u_{15} = 610$ на 31 не делятся. Следовательно, 31 есть собственный делитель u_{30}.

Остались числа $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_6 = 8$ и $u_{12} = 144$, которые, очевидно, собственных делителей не имеют.

Теорема доказана.

37. В «противовес» тем четырем числам Фибоначчи, которые не имеют собственных делителей, существуют числа Фибоначчи, обладающие несколькими собственными делителями. Например,

для u_{19} такими делителями будут числа 37 и 113, для u_{27} — числа 53 и 109 и т. д. Много ли чисел Фибоначчи с двумя и более собственными делителями — совершенно не ясно.

Встает естественный вопрос, каков же номер n числа Фибоначчи, собственным делителем которого является заданное простое p?

Из п. 25 следует, что $n \leqq p-1$, если p имеет вид $5t \pm 1$, и $n \leqq p+1$, если p имеет вид $5t+2$. Однако никакой формулы, позволяющей непосредственно вычислять номера членов с наперед заданным собственным делителем p, пока не известно.

Нами в п. 3 было доказано, что все числа Фибоначчи с составными номерами, кроме u_4, сами составные. Обратное неверно, так как, например, $u_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$. Возникает вопрос, конечно или бесконечно число всех простых чисел Фибоначчи, иными словами, существует или нет среди простых чисел Фибоначчи наибольшее? Вопрос этот сейчас еще далек от своего решения.

§ 3. ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ

1. Рассмотрим выражение

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}}, \tag{3.1}$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — целые *положительные* числа, а q_0 — целое *неотрицательное* число. Таким образом, в отличие от чисел $q_1, q_2, \ldots, q_n$, число q_0 может равняться нулю. Это несколько особое положение числа q_0 мы всегда будем иметь в виду и поэтому не будем его каждый раз оговаривать.

Выражение (3.1) называется *непрерывной дробью*, числа $q_0, q_1, \ldots, q_n$ — *неполными частными* этой дроби, а все непрерывные дроби вида

$$q_k + \cfrac{1}{q_{k+1} + \ddots + \cfrac{1}{q_n}} \tag{3.2}$$

— *полными частными*.

Иногда непрерывные дроби называются также цепными дробями. Непрерывные дроби находят применение в самых разнообразных вопросах математики. Читателю, желающему ознакомиться с ними подробнее, можно порекомендовать книгу А. Я. Хинчина «Цепные дроби», «Наука», 1978.

Процесс превращения некоторого числа в непрерывную дробь называется *разложением* этого числа в непрерывную дробь.

Посмотрим, как находятся неполные частные такого разложения обыкновенной дроби $\frac{a}{b}$.

Рассмотрим для этого алгорифм Евклида, примененный к числам a и b:

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1, \\ b &= r_1q_1 + r_2, \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_{n-1} + r_n, \\ r_{n-1} &= r_nq_n. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Первое из этих равенств дает нам

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \cfrac{1}{\cfrac{b}{r_1}}.$$

Но из второго равенства системы (3.3) следует

$$\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}},$$

так что

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}}.$$

Из третьего равенства (3.3) мы выводим

$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2} = q_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_2}{r_3}},$$

и потому

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_2}{r_3}}}}.$$

Продолжая этот процесс до конца (индукция!), мы, как легко видеть, придем к равенству

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}}.$$

По самому смыслу алгорифма Евклида $q_n > 1$. (Если бы q_n равнялось единице, то r_{n-1} было бы равно r_n и r_{n-2} разделилось бы на r_{n-1} нацело, т. е. весь алгорифм оборвался бы одним шагом раньше.) Значит, мы можем вместо q_n рассматривать выражение $(q_n - 1) + \frac{1}{1}$, т. е. считать $(q_n - 1)$ предпоследним неполным частным и 1 — последним. Такое соглашение оказывается удобным для дальнейшего.

2. Мы видим, что всякую рациональную дробь $\frac{a}{b}$ можно разложить в непрерывную. Покажем, что это разложение единственно, т. е. что у двух равных непрерывных дробей должны быть равны соответствующие неполные частные.

Для того чтобы это доказать, возьмем две непрерывные дроби, ω и ω'. Пусть $q_0, q_1, q_2, \ldots$ и $q'_0, q'_1, q'_2, \ldots$ — соответственно их неполные частные. Покажем, что из равенства $\omega = \omega'$ следует, что $q_0 = q'_0$, $q_1 = q'_1$, $q_2 = q'_2$ и т. д. В самом деле, q есть целая часть числа ω, а q'_0 — целая часть ω'; поэтому $q_0 = q'_0$. Далее, непрерывные дроби ω и ω' можно представить соответственно в виде

$$q_0 + \frac{1}{\omega_1} \quad \text{и} \quad q'_0 + \frac{1}{\omega'_1},$$

где ω_1 и ω_1' — снова непрерывные дроби. Из $\omega = \omega'$ и $q_0 = q_0'$ следует, что и $\omega_1 = \omega_1'$. Значит, равны и целые части чисел ω_1 и ω_1', т. е. q_1 и q_1'. Продолжая эти рассуждения (индукция!), убеждаемся в том, что $q_2 = q_2'$, $q_3 = q_3'$ и т. д.

3. Пусть

$$\omega = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{\ddots}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}} \tag{3.4}$$

— некоторая непрерывная дробь. Рассмотрим следующие числа:

$$q_0,\ q_0 + \frac{1}{q_1},\quad q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}},\ \ldots$$

Эти числа, записанные в виде обычных несократимых дробей

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{q_0}{1},$$

$$\frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = \omega,$$

называются *подходящими дробями* непрерывной дроби ω. Заметим, что переход от $\frac{P_k}{Q_k}$ к $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ осуществляется заменой последнего неполного частного из числа участвовавших в построении этой подходящей дроби, т. е. q_k, на $q_k + \frac{1}{q_{k+1}}$. Точно в том же самом смысле переход от подходящей дроби $\frac{P_k}{Q_k}$ ко всей непрерывной дроби ω осуществляется заменой последнего неполного частного q_k на $q_k + \frac{1}{\omega_{k+1}}$, т. е. на соответствующее полное частное ω_k.

4. Важную роль в теории непрерывных дробей играет следующая лемма.

Лемма. *Для всякой непрерывной дроби* (3.4) *имеют место следующие соотношения*:

$$P_{k+1} = P_k q_{k+1} + P_{k-1}, \tag{3.5}$$

$$Q_{k+1} = Q_k q_{k+1} + Q_{k-1}, \tag{3.6}$$

$$P_{k+1}Q_k - P_k Q_{k+1} = (-1)^k. \tag{3.7}$$

Будем доказывать все эти равенства одновременно индукцией по k.

Докажем их сначала для $k = 1$:

$$\frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}.$$

Так как числа $q_0 q_1 + 1$ и q_1 взаимно просты, дробь $\frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}$ несократима. Дробь же $\frac{P_1}{Q_1}$ несократима по определению, а у равных несократимых дробей равны числители и знаменатели. Значит, $P_1 = q_0 q_1 + 1$ и $Q_1 = q_1$. Далее,

$$\frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} = \frac{q_0 (q_1 q_2 + 1) + q_2}{q_1 q_2 + 1}. \tag{3.8}$$

Наибольший общий делитель чисел $q_0(q_1 q_2 + 1) + q_2$ и $q_1 q_2 + 1$ на основании п. 10 § 2 равен $(q_2, q_1 q_2 + 1)$ и на основании того же предложения равен $(q_2, 1)$, т. е. 1. Значит, дробь, стоящая в (3.8) справа, несократима, и потому

$$P_2 = q_0 (q_1 q_2 + 1) + q_2 = (q_0 q_1 + 1) q_2 + q_0 = P_1 q_2 + P_0$$

и

$$Q_2 = q_1 q_2 + 1 = Q_1 q_2 + Q_0.$$

Равенство

$$P_2 Q_1 - P_1 Q_2 = (-1)^1$$

проверяется без труда.

Этим основание индукции доказано.

Предположим теперь, что равенства (3.5), (3.6) и (3.7) справедливы, и рассмотрим подходящую дробь

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \frac{P_k q_{k+1} + P_{k-1}}{Q_k q_{k+1} + Q_{k-1}}. \tag{3.9}$$

Переход от $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ к $\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}$ по сделанному ранее замечанию осуществляется заменой q_{k+1} в выражении для $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ на $q_{k+1} + \frac{1}{q_{k+2}}$; так как в выражения для P_k, Q_k, P_{k-1}, Q_{k-1} величина q_{k+1} не входит, мы имеем

$$\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}} = \frac{P_k\left(q_{k+1} + \frac{1}{q_{k+2}}\right) + P_{k-1}}{Q_k\left(q_{k+1} + \frac{1}{q_{k+2}}\right) + Q_{k-1}},$$

или, вспоминая индуктивные предположения (3.5) и (3.6),

$$\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}} = \frac{P_{k+1} q_{k+2} + P_k}{Q_{k+1} q_{k+2} + Q_k}. \tag{3.10}$$

Докажем несократимость дроби, стоящей в (3.10) справа. Для этого достаточно показать, что ее числитель и знаменатель взаимно просты.

Предположим, что числа $P_{k+1}q_{k+2} + P_k$ и $Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k$ имеют некоторый общий делитель $d > 1$. Тогда выражение

$$(P_{k+1}q_{k+2} + P_k)\, Q_{k+1} - (Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k)\, P_{k+1}$$

тоже должно разделиться на d. Но по индуктивному предположению (3.7) это выражение равно $(-1)^{k+1}$ и делиться на d не может.

Итак, правая часть (3.10) несократима, и (3.10) есть, таким образом, равенство двух несократимых дробей. Значит,

$$P_{k+2} = P_{k+1}q_{k+2} + P_k$$

и

$$Q_{k+2} = Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k.$$

Для завершения доказательства индуктивного перехода нам остается показать, что

$$P_{k+2}Q_{k+1} - P_{k+1}Q_{k+2} = (-1)^{k+1}. \tag{3.11}$$

Но ввиду только что доказанного

$$P_{k+2}Q_{k+1} - P_{k+1}Q_{k+2} = \\ = P_{k+1}q_{k+2}Q_{k+1} + P_kQ_{k+1} - P_{k+1}q_{k+2}Q_{k+1} - P_{k+1}Q_k,$$

и (3.11) вытекает непосредственно из индуктивного предположения (3.7). Этим индуктивный переход обоснован и вся лемма доказана.

Следствие.

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{(-1)^k}{Q_kQ_{k+1}}. \tag{3.12}$$

Доказательство очевидно.

Так как неполные частные непрерывных дробей являются целыми положительными числами, из доказанной леммы следует, что

$$\begin{aligned} &P_0 < P_1 < P_2 < \ldots, \\ &Q_0 < Q_1 < Q_2 < \ldots \end{aligned} \tag{3.13}$$

Это простое, но важное замечание мы в дальнейшем еще уточним.

5. В ходе доказательства леммы предыдущего пункта мы осуществляли переход от равенства (3.10) к равенству (3.11). Если, однако, заменить в (3.10) неполное частное q_k на полное частное ω_k, то, как тоже было оговорено в конце п. 4, мы получим дробь ω:

$$\omega = \frac{P_k\omega_{k+1} + P_{k-1}}{Q_k\omega_{k+1} + Q_{k-1}}. \tag{3.14}$$

Теперь мы можем несколько дополнить сформулированное в п. 2 утверждение о единственности разложения числа в непрерывную дробь.

Лемма. *Пусть в* (3.14) *дробь* $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ *является предпоследней,* $k-1$*-й подходящей дробью к* $\frac{P_k}{Q_k}$,

а $\omega_{k+1} \geqq 1$. *Тогда* $\frac{P_k}{Q_k}$ *является подходящей дробью к* ω, *а* ω_{k+1} — *соответствующим полным частным.*

Доказательство. Разложим дробь $\frac{P_k}{Q_k}$ в непрерывную:

$$\frac{P_k}{Q_k} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{q_k}}}.$$

По условию мы имеем

$$\frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_{k-1}q_k + P_{k-1}}{Q_{k-1}q_k + Q_{k-2}},$$

где $\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}$ — третья от конца подходящая дробь к $\frac{P_n}{Q_n}$. Замена здесь q_k на $q_k + \frac{1}{\omega_{k+1}}$ приведет нас справа к

$$\frac{P_{k-1}\left(q_k + \frac{1}{\omega_{k+1}}\right) + P_{k-2}}{Q_{k-1}\left(q_k + \frac{1}{\omega_{k+1}}\right) + Q_{k-2}} = \frac{P_k\omega_{k+1} + P_{k-1}}{Q_k\omega_{k+1} + Q_{k-1}},$$

что по (3.14) равно ω. Следовательно,

$$\omega = \frac{P_k\omega_{k+1} + P_{k-1}}{Q_k\omega_{k+1} + Q_{k-1}} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{}{\ddots + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{\omega_{k+1}}}}}, \quad (3.15)$$

и требуемое получено. Здесь в ходе доказательства не было упомянуто условие $\omega_{k+1} \geqq 1$. В действительности оно используется в самом написании выражения (3.15): в случае $\omega_{k+1} < 1$ неполное частное q_k следовало бы заменить на большее число.

6. Применим теперь лемму п. 4 для описания всех непрерывных дробей с неполными частными, равными единице. Для таких дробей имеет место следующая интересная теорема.

Теорема. *Если непрерывная дробь имеет n неполных частных и каждое из этих неполных частных равно единице, то дробь равна* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Доказательство. Обозначим непрерывную дробь с n единичными неполными частными через α_n. Очевидно,

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$$

являются последовательными подходящими дробями α_n.

Пусть

$$\alpha_k = \frac{P_k}{Q_k}.$$

Так как

$$\alpha_1 = 1 = \frac{1}{1}$$

и

$$\alpha_2 = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1},$$

должно быть $P_1 = 1$, $P_2 = 2$. Далее, $P_{n+1} = P_n q_{n+1} + P_{n-1} = P_n + P_{n-1}$. Поэтому (сравни п. 6 § 1) $P_n = u_{n+1}$.

Аналогично $Q_1 = 1$, $Q_2 = 1$ и $Q_{n+1} = Q_n q_{n+1} + Q_{n-1} = Q_n + Q_{n-1}$, так что $Q_n = u_n$. Значит,

$$\alpha_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}. \tag{3.16}$$

Предоставляем читателю сопоставить этот результат с формулами (1.10) и (3.7).

7. Пусть нам даны две непрерывные дроби ω и ω':

$$\omega = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots}}, \qquad \omega' = q_0' + \cfrac{1}{q_1' + \cfrac{1}{q_2' + \ldots}},$$

причем

$$q_0' \geqq q_0,\quad q_1' \geqq q_1,\quad q_2' \geqq q_2, \ldots \tag{3.17}$$

Обозначим через

$$\frac{P_0}{Q_0},\quad \frac{P_1}{Q_1},\quad \frac{P_2}{Q_2},\ \ldots$$

подходящие дроби ω и через

$$\frac{P_0'}{Q_0'},\quad \frac{P_1'}{Q_1'},\quad \frac{P_2'}{Q_2'},\ \ldots$$

— подходящие дроби ω'.

Из результатов леммы п. 4 легко усмотреть, что ввиду (3.17)

$$P_0' \geqq P_0,\quad P_1' \geqq P_1,\quad P_2' \geqq P_2,\ \ldots$$

и

$$Q_0' \geqq Q_0,\quad Q_1' \geqq Q_1,\quad Q_2' \geqq Q_2,\ \ldots$$

Наименьшим значением всякого неполного частного, очевидно, является единица. Значит, если все неполные частные некоторой непрерывной дроби — единицы, то числители и знаменатели ее подходящих дробей растут медленнее, чем у подходящих дробей любой другой непрерывной дроби.

Оценим, насколько медленнее происходит этот рост. Очевидно, если не считать непрерывных дробей с единичными неполными частными, медленнее всего растут числители и знаменатели подходящих дробей такой непрерывной дроби, у которой одно из неполных частных есть 2, а остальные являются единицами. Такие непрерывные дроби тоже связаны с числами Фибоначчи, как показывает следующая лемма.

Лемма. *Если непрерывная дробь ω имеет неполными частными числа $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n$, причем*

$$q_0 = q_1 = q_2 = \ldots = q_{i-1} = q_{i+1} = \ldots = q_n = 1,$$
$$q_i = 2 \quad (i \neq 0),$$

то

$$\omega = \frac{u_{i+1}u_{n-i+3} + u_i u_{n-i+1}}{u_i u_{n-i+3} + u_{i-1}u_{n-i+1}}.$$

Доказательство этой леммы ведется индукцией по i. Если $i = 1$, то при всяком n

$$\omega = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\ddots}{\ddots + \cfrac{1}{1}}}},$$

$n-1$ неполное частное

или ввиду доказанного в начале этого пункта

$$\omega = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{a_{n-1}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{u_{n-1}}{u_n}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{2u_n + u_{n-1}}{u_n}} = 1 + \frac{u_n}{u_{n+2}} = \frac{u_{n+2} + u_n}{u_{n+2}},$$

или, полагая в соответствии с п. 25 § 1 $u_0 = 0$,

$$\omega = \frac{u_2 u_{n+2} + u_1 u_n}{u_1 u_{n+2} + u_0 u_n}.$$

Основание индукции этим доказано.

Предположим теперь, что при всяком n непрерывная дробь

$$i \text{ неполных частных} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \cfrac{1}{1 + \\ \qquad \cdot \\ \qquad\quad \cdot \\ \qquad\quad\quad \cdot \\ \qquad\quad\quad + 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{a_{n-i}}} \end{array} \right. \tag{3.18}$$

равна

$$\frac{u_{i+1} u_{n-i+3} + u_i u_{n-i+1}}{u_i u_{n-i+3} + u_{i-1} u_{n-i+1}}. \tag{3.19}$$

Возьмем непрерывную дробь

$$i+1 \text{ неполное частное} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \cfrac{1}{1 + \\ \qquad \cdot \\ \qquad\quad \cdot \\ \qquad\quad\quad \cdot \\ \qquad\quad\quad + 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{a_{n-i-1}}} \end{array} \right. .$$

Ее, очевидно, можно рассматривать и так:

$$i \text{ неполных частных} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \cfrac{1}{\cfrac{}{1 + \\ \qquad \cdot \\ \qquad\quad \cdot \\ \qquad\quad\quad \cdot \\ \qquad\quad\quad + 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{a_{n-i-1}}} \end{array} \right. . \tag{3.20}$$

Непрерывная дробь, стоящая в (3.20) ниже пунктирной черты, на основании равенства (3.18) и (3.19) равна

$$\frac{u_{i+1}u_{n-i+2}+u_iu_{n-i}}{u_iu_{n-i+2}+u_{i-1}u_{n-i}}.$$

Значит, вся дробь (3.20) равна

$$1+\frac{1}{\dfrac{u_{i+1}u_{n-i+2}+u_iu_{n-i}}{u_iu_{n-i+2}+u_{i-1}u_{n-i}}}=$$

$$=\frac{(u_i+u_{i+1})\,u_{n-i+2}+(u_{i-1}+u_i)\,u_{n-i}}{u_{i+1}u_{n-i+2}+u_iu_{n-i}}=\frac{u_{i+2}u_{n-i+2}+u_{i+1}u_{n-i}}{u_{i+1}u_{n-i+2}+u_iu_{n-i}}.$$

Этим доказаны индуктивный переход и вся лемма.

Следствие. Если не все неполные частные непрерывной дроби ω являются единицами, число этих неполных частных не меньше n и $q_0 \neq 0$, то, записав ω в виде обычной дроби $\frac{P}{Q}$, мы будем иметь

$$P \geqq u_{i+1}u_{n-i+3}+u_iu_{n-i+1} > u_{i+1}u_{n-i+2}+u_iu_{n-i+1}=u_{n+2},$$

и аналогично

$$Q > u_{n+1}.$$

Существенную роль при этом, конечно, играет лемма п. 4, на основании которой в процессе «свертывания» непрерывной дроби в обыкновенную мы получаем только несократимые дроби. Поэтому уменьшение числителей и знаменателей получаемых дробей из-за их сокращения не будет иметь места.

8. Из доказанного в предыдущем пункте мы можем получить следующую теорему, указывающую на особое положение чисел Фибоначчи по отношению к алгорифму Евклида.

Теорема. *Число шагов в алгорифме Евклида, примененном к числам a и b, при некотором a равно $n-1$, если $b=u_n$, и при всяком a меньше $n-1$, если $b<u_n$.*

Доказательство. Первая часть теоремы доказывается совсем просто. В качестве a достаточно взять следующее за b число Фибоначчи, т. е. u_{n+1}. Тогда

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\alpha_n.$$

Непрерывная дробь α_n имеет n неполных частных, т. е. число шагов алгорифма Евклида, примененного к числам a и b, равно $n-1$.

Докажем вторую часть теоремы. Предположим обратное, т. е. что число шагов указанного алгорифма не меньше $n-1$. Разложим отношение $\frac{a}{b}$ в непрерывную дробь ω. Очевидно, ω будет

иметь не меньше, чем n, неполных частных (именно, на единицу больше, чем длина алгорифма Евклида). Так как b не есть число Фибоначчи, не все неполные частные ω будут единицами, и потому, по следствию леммы п. 7, $b > u_n$, что противоречит условию теоремы.

Доказанная теорема означает, что алгорифм Евклида, примененный к соседним числам Фибоначчи, в некотором смысле «самый длинный».

9. Выражение

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_n + \ddots}}} \tag{3.21}$$

будем называть *бесконечной непрерывной дробью*. На бесконечные непрерывные дроби можно естественным образом распространить определения и результаты предыдущих пунктов.

Пусть

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \ldots, \frac{P_n}{Q_n}, \ldots \tag{3.22}$$

— последовательность (очевидно, бесконечная) подходящих дробей дроби (3.21). Покажем, что эта последовательность имеет предел.

Рассмотрим для этого отдельно последовательности

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}, \ldots \tag{3.23}$$

и

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_3}{Q_3}, \ldots, \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \ldots \tag{3.24}$$

На основании (3.12) и (3.13)

$$\frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} - \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} + \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} =$$
$$= \frac{-1}{Q_{2n+2}Q_{2n+1}} + \frac{1}{Q_{2n+1}Q_{2n}} > 0.$$

Значит, последовательность (3.23) — возрастающая. Точно так же из

$$\frac{P_{2n+3}}{Q_{2n+3}} - \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = \frac{1}{Q_{2n+3}Q_{2n+2}} - \frac{1}{Q_{2n+2}Q_{2n+1}} < 0$$

следует, что последовательность (3.24) — убывающая.

Всякий член последовательности (3.24) больше всякого члена последовательности (3.23). Действительно, рассмотрим числа

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \quad \text{и} \quad \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}$$

и возьмем нечетное число k, большее как $2n$, так и $2m+1$. Из (3.12) вытекает, что

$$\frac{P_k}{Q_k} > \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}, \tag{3.25}$$

а из возрастания (3.23) и убывания (3.24)—

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} > \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \tag{3.26}$$

и

$$\frac{P_k}{Q_k} < \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}. \tag{3.27}$$

Сравнивая выражения (3.25), (3.26) и (3.27), мы получаем, что

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}},$$

т. е. любая четная подходящая дробь всегда меньше любой нечетной.

На основании (3.12) и (3.13)

$$\left|\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \frac{1}{Q_{n+1}Q_n} < \frac{1}{n^2},$$

и потому при увеличении n разность $(n+1)$-й и n-й подходящих дробей по абсолютной величине стремится к нулю.

Из всего сказанного можно заключить, что последовательности (3.23) и (3.24) имеют один и тот же предел, который, очевидно, является и пределом (3.22). Этот предел называется *значением бесконечной непрерывной дроби* (3.21).

В п. 2 была установлена единственность разложения рационального числа в непрерывную дробь. Так как проведенные при этом рассуждения никак не опирались на конечность рассмотренных непрерывных дробей, тем самым нами было доказано, что любое вещественное (а не только рациональное) число может быть значением не более чем одной непрерывной дроби.

Так как рациональное число всегда может быть разложено в конечную непрерывную дробь, из только что сказанного следует, что оно не может быть разложено в бесконечную непрерывную дробь. Следовательно, значение бесконечной непрерывной дроби обязательно является иррациональным числом.

Теория разложений иррациональных чисел в непрерывные дроби представляет собой глубокую по содержанию и интересную по результатам ветвь теории чисел. Мы не будем здесь углубляться в эту теорию, а остановимся только на примерах, связанных с числами Фибоначчи.

10. Найдем значение бесконечной непрерывной дроби

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}. \tag{3.28}$$

По доказанному выше это значение есть $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$, где $\alpha_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Вычислим этот предел.

Как уже было установлено в п. 20 § 1, u_n есть ближайшее к $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ целое число; значит

$$u_n=\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}+\theta_n,$$

где $|\theta_n|<\frac{1}{2}$, каково бы ни было n.

Поэтому ввиду доказанного в п. 5

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}+\theta_{n+1}}{\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}+\theta_n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha+\frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n}}{1+\frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha+\frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n}\right)}.$$

Но $\theta_{n+1}\sqrt{5}$ есть величина ограниченная (она по абсолютной величине меньше двух), а α^n при n, стремящемся к бесконечности, неограниченно возрастает (потому что $\alpha>1$). Значит,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n}=0.$$

В силу тех же причин и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_n \sqrt{5}}{\alpha^n} = 0,$$

и мы получаем

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha.$$

Значение непрерывной дроби (3.28) можно вычислить и не прибегая к формуле Бине и предельным переходам. (Нам в известном смысле «достаточно» проведенного в п. 2 индуктивного рассуждения, обслуживающего, очевидно, не только конечные непрерывные дроби, но и их пределы — бесконечные дроби.)

Представим для этого дробь (3.28) в виде

$$1 + \frac{1}{x}.$$

Очевидно, здесь выражение x само является непрерывной дробью (3.28), так что

$$x = 1 + \frac{1}{x},$$

откуда

$$x^2 - x - 1 = 0, \tag{3.29}$$

и

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Так как значение дроби (3.28) является неотрицательным числом, оно должно равняться положительному корню уравнения (3.29), т. е. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, а это и есть α.

Из доказанного следует, что отношение соседних чисел Фибоначчи с ростом их номеров приближается к α. Этим можно воспользоваться для приближенного вычисления числа α (сравни вычисление u_n в п. 20 § 1, а также формулу (1.35)). Ошибка при таком вычислении получается маленькой, даже если мы возьмем небольшие числа Фибоначчи. Например (с точностью до пятого знака),

$$\frac{u_{10}}{u_9} = \frac{55}{34} = 1{,}6176,$$

а $\alpha = 1{,}6180$. Ошибка, как мы видим, меньше 0,1%.

Между прочим, в отношении ошибок при приближенном вычислении иррациональных чисел с помощью подходящих дробей и их разложений в непре-

рывные дроби число α представляет собой наихудший случай. Всякое другое число описывается своими подходящими дробями в некотором смысле более точно, чем α. Остановимся более подробно на рассмотрении этого круга вопросов.

11. Так как значение непрерывной дроби является пределом последовательности подходящих к ней дробей, подходящие дроби должны приближаться к значению своей непрерывной дроби, и можно говорить о скорости такого приближения. В сущности, речь здесь идет о том, насколько точно можно описывать вещественные числа рациональными дробями, знаменатели которых не очень велики.

Приближения вещественного числа его подходящими дробями являются наиболее точными в смысле следующего утверждения.

Теорема Лежандра. *Пусть* ω — *произвольное число, а* $\frac{p}{q}$ — *некоторая несократимая дробь. Предпоследнюю подходящую дробь при разложении* $\frac{p}{q}$ *обозначим через* $\frac{p'}{q'}$.

Тогда для того чтобы $\frac{p}{q}$ *была подходящей дробью к* ω, *необходимо и достаточно выполнение неравенства*

$$\left|\frac{p}{q}-\omega\right|<\frac{1}{q(q+q')}. \tag{3.30}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$\frac{p}{q}=\frac{P_n}{Q_n},\quad \frac{p'}{q'}=\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

соответственно n-я и $n-1$-я подходящие дроби к ω. Тогда, вводя в рассмотрение $n+1$-е полное частное ω_{n+1} (которое больше единицы), мы согласно (3.17) и (3.7) имеем

$$\begin{aligned}\left|\frac{P_n}{Q_n}-\omega\right| &= \left|\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_n\omega_{n+1}-P_{n-1}}{Q_n\omega_{n+1}-Q_{n-1}}\right| = \\ &= \left|\frac{(P_nQ_n-P_nQ_n)\,\omega_{n+1}+(-1)^n}{Q_n(Q_n\omega_{n+1}+Q_{n-1})}\right| = \\ &= \frac{1}{Q_n(Q_n\omega_{n+1}+Q_{n-1})}<\frac{1}{q(q+q')}. \end{aligned}\tag{3.31}$$

Достаточность. Пусть выполняется (3.30). Выберем число θ, для которого будет

$$\omega = \frac{p\theta + p'}{q\theta + q'}.$$

Тогда в силу (3.17) и (3.7) мы получаем

$$\left|\frac{p}{q} - \omega\right| = \left|\frac{p}{q} - \frac{p\theta + p'}{q\theta + q'}\right| = \left|\frac{pq\theta - pq\theta + pq' - p'q}{q(q\theta + q')}\right| =$$

$$= \frac{1}{q(q\theta + q')} < \frac{1}{q(q + q')},$$

так что $\theta > 1$. Тем самым мы оказываемся в условиях леммы п. 5, согласно которой $\frac{p}{q}$ есть подходящая дробь к ω, а θ — соответствующее полное частное.

12. В обозначениях предыдущего пункта $q' < q$. Поэтому если

$$\left|\frac{p}{q} - \omega\right| < \frac{1}{2q^2}, \tag{3.32}$$

то $\frac{p}{q}$ является подходящей дробью к ω. Ясно вместе с тем, что это условие не является необходимым для того, чтобы дробь $\frac{p}{q}$ была подходящей: не все подходящие дроби числа ω обладают свойством (3.32). Вместе с тем имеется «достаточно много» подходящих дробей к ω, которые неравенству (3.32) удовлетворяют. Точная формулировка этого содержится в следующей теореме.

13. Теорема Валена. *Если ω — произвольное число, то из двух подходящих дробей ω с соседними номерами хотя бы одна $\frac{p}{q}$ удовлетворяет неравенству*

$$\left|\frac{p}{q} - \omega\right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Доказательство. Возьмем две соседние подходящие дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ и $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ и оценим сумму

$$s = \left|\frac{P_n}{Q_n} - \omega\right| + \left|\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \omega\right|. \tag{3.33}$$

Замечая, что на основании рассуждений п. 9 стоящие под знаками модуля числа должны быть разных знаков и вспоминая, что произведение двух различных чисел меньше половины суммы их квадратов, мы получаем

$$s = \left| \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} \right| = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{2Q_n^2} + \frac{1}{2Q_{n+1}^2}.$$

Значит, хотя бы одно из составляющих s слагаемых должно быть меньше соответствующего слагаемого в (3.33) справа, т. е.,

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} - \omega \right| < \frac{1}{2Q_n^2} \quad \text{или} \quad \left| \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \omega \right| < \frac{1}{2Q_{n+1}^2},$$

а это и требовалось.

14. Если мы заменим неравенство (3.32) на еще более сильное, увеличив в нем коэффициент при q^2, то у нас окажется еще меньше шансов получить удовлетворяющие ему подходящие дроби. Тем не менее при умеренном увеличении этого коэффициента таких возможностей будет еще довольно много.

Теорема Бореля. *Если ω — произвольное число, то из любых трех последовательных его подходящих дробей хотя бы одна $\frac{p}{q}$ удовлетворяет условию*

$$\left| \frac{p}{q} - \omega \right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, q^2}. \tag{3.34}$$

Доказательство. Возьмем три последовательные подходящие дроби к числу ω:

$$\frac{P_n}{Q_n}, \quad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}, \quad \frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}}. \tag{3.35}$$

Как было выяснено в (3.31),

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} - \omega \right| = \frac{1}{Q_n (Q_n \omega_{n+1} + Q_{n-1})} = \frac{1}{Q_n^2 \left(\omega_{n+1} + \frac{Q_{n-1}}{Q_n} \right)}. \tag{3.36}$$

Поэтому, обозначая для удобства $\sqrt{5}$ через c, мы можем, учитывая (3.36), переписать (3.34), как

$$\frac{1}{Q_n^2 \left(\omega_{n+1} + \frac{Q_{n-1}}{Q_n} \right)} < \frac{1}{cQ_n^2},$$

или

$$\omega_{n+1} + \frac{Q_{n-1}}{Q_n} > c.$$

Далее будем доказывать теорему от противного. Несоблюдение неравенства (3.34) ни для одной из подходящих дробей (3.35) означает

$$\omega_{n+1} + \frac{Q_{n-1}}{Q_n} \leqq c, \tag{3.37}$$

$$\omega_{n+2} + \frac{Q_n}{Q_{n+1}} \leqq c, \tag{3.38}$$

$$\omega_{n+3} + \frac{Q_{n+1}}{Q_{n+2}} \leqq c. \tag{3.39}$$

Однако

$$\omega_{n+1} = q_n + \frac{1}{\omega_{n+2}},$$

так что из (3.37) следует

$$q_n + \frac{1}{\omega_{n+2}} + \frac{Q_{n-1}}{Q_n} \leqq c,$$

или

$$\frac{1}{\omega_{n+2}} + \frac{Q_n q_n + Q_{n-1}}{Q_n} = \frac{1}{\omega_{n+2}} + \frac{Q_{n+1}}{Q_n} \leqq c. \tag{3.40}$$

Перемножая это неравенство почленно с (3.38), мы получаем

$$2 + \omega_{n+2}\frac{Q_{n+1}}{Q_n} + \frac{Q_n}{\omega_{n+2}Q_{n+1}} \leqq c^2,$$

или, полагая

$$\omega_{n+2}\frac{Q_{n+1}}{Q_n} = t,$$

и вспоминая, что $c = \sqrt{5}$, мы имеем

$$t + \frac{1}{t} \leqq 3,$$

т. е., для положительных t,

$$t^2 - 3t + 1 \leqq 0,$$

откуда

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leqq t \leqq \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Заметим, что верхняя граница для t оказывается равной α^2. Ясно поэтому, что если $\omega_{n+2} > \alpha$, то

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} < \alpha. \tag{3.41}$$

Однако если $\omega_{n+2} > \alpha$, то из (3.38) следует

$$\alpha + \frac{Q_n}{Q_{n+1}} \leqq c,$$

т. е.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{Q_n}{Q_{n+1}} \leqq \sqrt{5},$$

так что

$$\frac{Q_n}{Q_{n+1}} \leqq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

и

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} \geqq \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha,$$

что противоречит (3.41). Значит, $\omega_{n+2} \leqq \alpha$. Так как, однако, величины ω_{n+2} и $\frac{Q_{n+1}}{Q_n}$ входят в неравенства (3.38) и (3.39) равноправно, аналогичные рассуждения дают нам

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} \leqq \alpha. \tag{3.42}$$

По тем же соображениям из (3.40) и (3.39) вытекает, что

$$\omega_{n+3} \leqq \alpha, \quad \frac{Q_{n+2}}{Q_{n+1}} \leqq \alpha. \tag{3.43}$$

Далее заметим, что

$$\omega_{n+2} = q_{n+2} + \frac{1}{\omega_{n+3}},$$

т. е.

$$q_{n+2} = \omega_{n+2} - \frac{1}{\omega_{n+3}} \leqq \alpha.$$

Так как q_{n+2} — целое положительное число, отсюда следует, что $q_{n+2} = 1$. Но тогда

$$Q_{n+2} = Q_{n+1} + Q_n,$$

и из (3.43) следует

$$\frac{Q_{n+2}}{Q_{n+1}} = 1 + \frac{Q_n}{Q_{n+1}} \leqq \alpha,$$

откуда

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} \geqq \frac{1}{\alpha - 1} = \alpha.$$

Вместе с (3.42) это дает нам

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \alpha,$$

чего, однако, не может быть, так как дробь $\frac{Q_{n+1}}{Q_n}$ рациональна, а число α является иррациональным.

15. Устанавливаемые в теоремах Валена и Бореля факты могут создать впечатление, будто дальнейшее увеличение коэффициента при q^2 в формулах (3.32) и (3.34) заставит лишь выбирать нужную подходящую дробь $\frac{p}{q}$ из более длинных серий подходящих дробей. Это впечатление, однако, оказывается обманчивым. В действительности вся картина меняется весьма резко.

Подчеркнем, что в последующих рассуждениях число α уже не возникает попутно по ходу доказательства, а становится вместе со своими подходящими дробями тем примером, который определяет всю ситуацию.

Теорема Гурвица. *Если* $c > \sqrt{5}$, *то существуют числа* ω, *для которых неравенство*

$$\left| \frac{p}{q} - \omega \right| < \frac{1}{cq^2} \tag{3.44}$$

выполняется лишь для конечного числа несократимых дробей $\frac{p}{q}$.

(Согласно теореме Лежандра все такие дроби $\frac{p}{q}$ должны быть подходящими для числа ω.)

Доказательство. В качестве числа ω можно взять $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Пусть $c > \sqrt{5}$ и

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{1}{cq^2} < \frac{1}{2q^2}.$$

Тогда по теореме п. 13 $\frac{p}{q}$ должна быть подходящей дробью к α. Положим $\frac{p}{q} = \frac{P_n}{Q_n}$ и напишем снова, как в (3.36),

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \omega\right| = \frac{1}{Q_n^2\left(\omega_{n+1} + \frac{Q_{n-1}}{Q_n}\right)}.$$

Кроме того, согласно (3.16) в нашем случае $\omega_{n+1} = \alpha$, а $Q_n = u_n$. Значит (в обозначениях п. 10)

$$\frac{Q_{n-1}}{Q_n} = \frac{1}{\alpha_{n-1}},$$

причем $\frac{1}{\alpha_{n-1}}$ отличается от $\frac{1}{\alpha}$ на некоторое ε_n, становящееся с ростом n сколь угодно малым.

Поэтому мы имеем

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \omega\right| = \frac{1}{Q_n^2\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} + \varepsilon_n\right)} = \frac{1}{Q_n^2\left(\sqrt{5} + \varepsilon_n\right)}.$$

Таким образом, если взять $c > \sqrt{5}$, то при достаточно большом n будет $c > \sqrt{5} + \varepsilon_n$, так что

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \omega\right| = \frac{1}{Q_n^2\left(\sqrt{5} + \varepsilon_n\right)} > \frac{1}{cQ_n^2}.$$

Значит, в условиях $c > \sqrt{5}$ неравенство (3.44) будет при $\omega = \alpha$ выполняться лишь для конечного числа подходящих дробей с не очень большими номерами.

Остается открытым вопрос о том, существуют ли другие, отличные от α, числа ω, для которых неравенство (3.44) выполняется лишь для конечного числа подходящих дробей.

§ 4. ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ И ГЕОМЕТРИЯ

1. Разделим отрезок AB единичной длины (рис. 2) на две части так, чтобы бо́льшая из его частей являлась средним пропорциональным между меньшей его частью и всем отрезком.

Рис. 2.

Обозначим для этого искомую длину большей части отрезка через x. Очевидно, длина его меньшей части при этом будет равна $1-x$, и условие нашей задачи дает нам пропорцию

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}, \tag{4.1}$$

откуда

$$x^2=1-x. \tag{4.2}$$

Положительным корнем (4.2) является $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, так что отношения в пропорции (4.1) равны

$$\frac{1}{x}=\frac{2}{-1+\sqrt{5}}=\frac{2(1+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\alpha$$

каждое. Такое деление (точкой C_1) называется *делением в среднем и крайнем отношении*. Его часто называют также *золотым делением* или *золотым сечением*.

Если взять отрицательный корень уравнения (4.2), то делящая точка C_2 окажется вне отрезка AB (такого рода деление в геометрии называется внешним делением), как это видно из рис. 2. Легко показать, что и здесь мы имеем дело с золотым сечением:

$$\frac{C_2B}{AB}=\frac{AB}{C_2A}=\alpha.$$

2. Фактическое построение точки, делящей отрезок золотым сечением, осуществляется без труда.

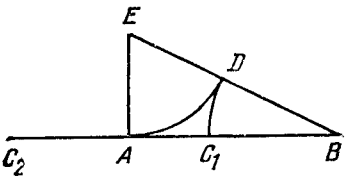

Рис. 3.

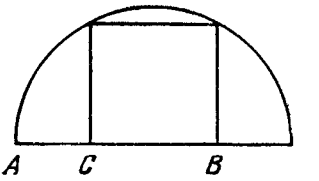

Рис. 4.

Пусть $AB = 1$; восставим из точки A перпендикуляр и возьмем точку E, для которой $AE = \frac{1}{2}$ (рис. 3). Тогда

$$EB = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Проведя из E, как из центра, дугу через A до пересечения с EB в точке D, мы получаем

$$BD = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Наконец, проведя через D дугу с центром в B, мы находим искомую точку C_1. Точку внешнего деления C_2 можно найти из условия $AC_2 = BC_1$.

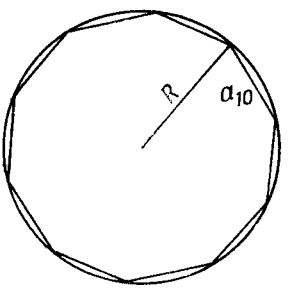

Рис. 5.

3. Золотое сечение довольно часто встречается в геометрии. Например, для квадрата, вписанного в полукруг (см. рис. 4), точка C делит золотым сечением отрезок AB.

Сторона a_{10} правильного десятиугольника (рис. 5), вписанного в круг радиуса R, как известно, равна

$$2R \sin \frac{360^\circ}{2 \cdot 10},$$

т. е. $2R \sin 18^\circ$.

Вычислим $\sin 18^\circ$. На основании известных формул тригонометрии

$$\sin 36^\circ = 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ,$$

$$\cos 36^\circ = 1 - 2 \sin^2 18^\circ,$$

так что

$$\sin 72° = 4 \sin 18° \cos 18° (1 - 2 \sin^2 18°). \tag{4.3}$$

Так как $\sin 72° = \cos 18° \neq 0$, из (4.3) следует, что

$$1 = 4 \sin 18° (1 - 2 \sin^2 18°),$$

и потому $\sin 18°$ является одним из корней уравнения

$$1 = 4x (1 - 2x^2),$$

или

$$8x^3 - 4x + 1 = 0.$$

Разложив левую часть последнего уравнения на множители, мы получаем

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x - 1) = 0,$$

откуда

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \quad x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Так как $\sin 18°$ есть положительное число, отличное от $\frac{1}{2}$, имеем

$$\sin 18° = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{1}{2a}.$$

Заметим для дальнейшего, что

$$\cos 36° = 1 - 2 \sin^2 18° = 1 - 2 \frac{1}{4a^2} = 1 - \frac{1}{2a^2} = \frac{2a^2 - 1}{2a^2} =$$

$$= \frac{2 + 2a - 1}{2a^2} = \frac{2a + 1}{2a^2} = \frac{a}{2a^2} = \frac{a}{2}.$$

Таким образом,

$$a_{10} = 2R \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = R \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{R}{a}.$$

Иными словами, a_{10} равно большей части радиуса круга, разделенного золотым сечением.

Практически при вычислении a_{10} можно вместо a брать отношение соседних чисел Фибоначчи (см. п. 26 § 1 или п. 10 § 3) и считать приближенно, что a_{10} есть $\frac{8}{13} R$ или даже $\frac{5}{8} R$.

4. Рассмотрим правильный пятиугольник. Его диагонали образуют правильный звездчатый пятиугольник (рис. 6).

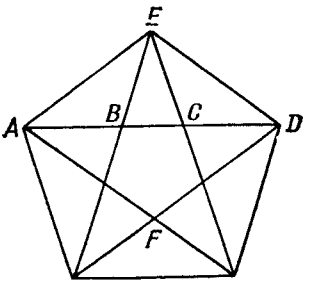

Рис 6.

Угол AFD равен 108°, а угол ADF равен 36°. Значит, по теореме синусов

$$\frac{AD}{AF} = \frac{\sin 108°}{\sin 36°} = \frac{\sin 72°}{\sin 36°} = 2\cos 36° = 2\,\frac{1+\sqrt{5}}{4} = \alpha.$$

Так как очевидно, что $AF = AC$, должно быть

$$\frac{AD}{AF} = \frac{AD}{AC} = \alpha,$$

и точка C делит отрезок AD золотым сечением.

Но тогда, по определению золотого сечения,

$$\frac{AC}{CD} = \alpha.$$

Замечая, что $AB = CD$, мы получаем

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC} = \alpha.$$

Таким образом, среди отрезков

$$BC,\ AB,\ AC,\ AD$$

каждый последующий в α раз больше предыдущего.

Пусть читатель попутно проверит, что и

$$\frac{AD}{AE} = \alpha.$$

5. Возьмем прямоугольник со сторонами a и b и будем вписывать в него наибольшие возможные квадраты, как это показано на рис. 7.

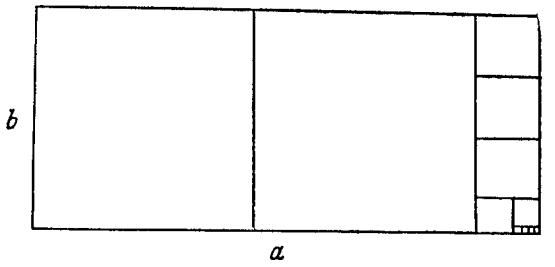

Рис. 7.

Рассуждения п. 5 § 2 показывают, что такой процесс в случае целых a и b соответствует алгорифму Евклида, примененному к этим числам. Числа квадратов одинаковых размеров равны при этом (п. 1 § 3) соответствующим неполным частным разложения $\frac{a}{b}$ в непрерывную дробь.

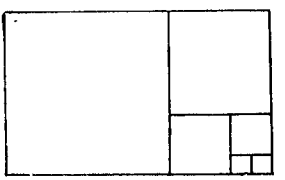

Рис. 8.

Если разбивать так на квадраты прямоугольник, стороны которого относятся как соседние числа Фибоначчи (рис. 8), то на основании п. 5 § 3 все квадраты, кроме двух самых маленьких, будут различными.

Так как стороны всех этих квадратов равны соответственно $u_1, u_2, \ldots, u_n$, их суммарная площадь, очевидно, равна

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2.$$

Но это есть площадь разбиваемого нами прямоугольника, равная $u_n u_{n+1}$.

Таким образом, при любом n

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u_n u_{n+1},$$

и мы получили новое, геометрическое доказательство утверждения п. 4 § 1.

6. Пусть теперь отношение сторон прямоугольника равно α. (Такие прямоугольники мы будем для краткости называть *прямоугольниками золотого сечения.*) Докажем, что, вписав в прямоугольник золотого сечения наибольший возможный квадрат (рис. 9), мы снова получим прямоугольник золотого сечения.

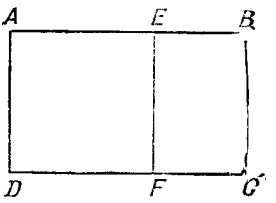

Рис 9

В самом деле,

$$\frac{AB}{AD} = \alpha;$$

по условию $AD = AE = EF$, так как $AEFD$ — квадрат. Значит,

$$\frac{EF}{EB} = \frac{AB - EB}{EB} = \alpha^2 - 1.$$

Но $\alpha^2 - 1 = \alpha$, так что

$$\frac{EF}{EB} = \alpha.$$

На рис. 10 показано, как прямоугольник золотого сечения может быть «почти весь» исчерпан квадратами *I*, *II*, *III*, ... При этом каждый раз после вписывания очередного квадрата

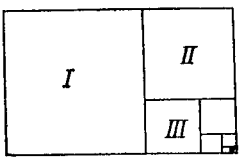

Рис. 10.

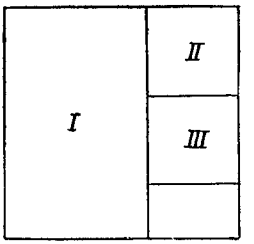

Рис. 11.

будет оставаться фигура, являющаяся прямоугольником золотого сечения.

Пусть читатель сравнит эти рассуждения с пп. 5 и 9 предыдущего параграфа.

Заметим, что если в квадрат вписать прямоугольник золотого сечения *I* и квадраты *II* и *III*, как это показано на рис. 11, то оставшийся прямоугольник

тоже окажется прямоугольником золотого сечения. Доказательство предоставляется провести читателю.

7. По аналогии с прямоугольниками золотого сечения можно говорить и о *треугольниках золотого сечения*: остроугольном — с углами 36°, 72° и 72° и тупоугольном — с углами 108°, 36° и 36°. На рис. 12 видно, как остроугольный треугольник золотого сечения разбивается на меньшие три треугольника золотого сечения, и обозначены величины углов и отрезков.

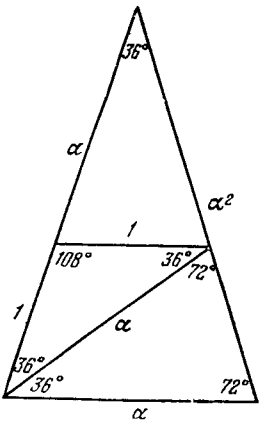

Рис. 12.

8. Природа дает нам многочисленные примеры расположений однородных предметов, описываемых числами Фибоначчи.

В разнообразных спиралевидных расположениях мелких частей растений обычно можно усмотреть два семейства спиралей. В одном из этих семейств спирали завиваются по часовой стрелке, а в другом — против. Числа спиралей того и другого типов часто оказываются соседними числами Фибоначчи.

Так, взяв молодую сосновую веточку, легко заметить, что хвоинки образуют две спирали, идущих справа снизу налево вверх. Вместе с тем они же составляют три спирали, идущие слева снизу направо вверх.

На многих шишках семена (т. е. «чешуйки») расположены в трех спиралях, полого навивающихся на стержень шишки. Они же расположены в пяти спиралях, круто навивающихся в противоположном направлении. В крупных шишках удается наблюдать 5 и 8 и даже 8 и 13 спиралей. Хорошо заметны такие спирали и на ананасе: обычно их бывает 8 и 13.

У многих сложноцветных (например, у маргаритки или ромашки) заметно спиральное расположение отдельных цветков в соцветиях-корзинках. Число спиралей бывает здесь 13 в одном направлении и 21 в другом или даже соответственно 21 и 34. Особенно

много спиралей можно наблюдать в расположении семечек крупного подсолнуха. Их число в каждом из направлений может достигать соответственно 55 и 89.

9. Прямоугольники золотого сечения выглядят «пропорционально» и приятны на вид. Вещами, имеющими такую форму, оказывается удобным пользоваться. Поэтому многим «прямоугольным» предметам нашего обихода (книгам, спичечным коробкам, чемоданам и т. п.) часто придается именно такая форма. Например, данная книга имеет форму прямоугольника с отношением сторон 1,62, а заполненная текстом часть ее страницы — форму прямоугольника с отношением сторон 1,64.

Различными философами-идеалистами древности и средневековья внешняя красота прямоугольников золотого сечения и других фигур, в которых наблюдается деление в среднем и крайнем отношении, возводилась в эстетический и даже философский принцип. Золотым сечением и еще некоторыми числовыми отношениями пытались не только описать, но и объяснить явления природы и даже общественной жизни, а с самим числом α и с его подходящими дробями производились разного рода мистические «операции». Разумеется, подобные «теории» ничего общего с наукой не имеют.

10. Числа Фибоначчи появляются также в вопросах, связанных с исследованием путей в различных

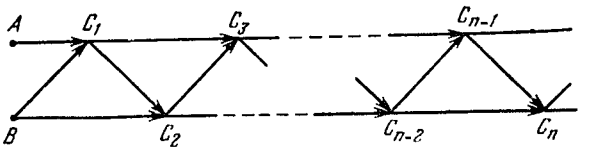

Рис. 13

геометрических конфигурациях. Рассмотрим, например, сеть путей, изображенную на рис. 13 (такие сети в математике принято называть *ориентированными графами*), и подсчитаем число путей, которыми можно, двигаясь вдоль стрелок, перейти из вершины A или вершины B в вершину C_n.

Обозначим числа таких путей соответственно через a_n и b_n. Ясно, что при начале движения, как из точки A, так и из точки B, в вершину C_n можно попасть двумя способами: через вершину C_{n-1} с последующим шагом вдоль наклонного ребра и через вершину C_{n-2} с последующим шагом вдоль горизонтального ребра. Значит,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}.$$

Нам остается заметить, что $a_1 = a_2 = 1$, и $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, откуда сразу следует, что $a_n = u_n$ и $b_n = u_{n+1}$.

11. Следующая задача будет касаться уже не подсчета числа путей в ориентированном графе, а выбора рациональных переходов по этим путям.

Рассмотрим следующую игру-состязание в ее традиционной постановке, называемой «цзяньшицзы». Пусть имеются две кучи предметов (например, спичек), и два игрока поочередно берут либо произвольное число предметов из одной кучи, либо поровну из каждой кучи. Выигравшим считается тот, кто забирает последние предметы.

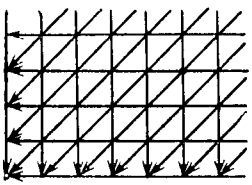

Рис. 14.

В более математизированной форме эту игру можно представить себе, как имеющийся перед игроками ориентированный граф, изображенный на рис. 14. Будем считать, что граф расположен на координатной плоскости, и две целочисленные координаты каждой из его вершин соответствуют числу предметов в первой и второй кучах (например, жирная точка на рис. 14 имеет координаты (5, 3)). Начальное положение игры может быть отмечено помещением фишки в соответствующую вершину графа. Процесс игры состоит в поочередном уменьшении игроками одной из координат вершины на целое число или обеих координат на одно и то же число, т. е. в прямолинейном передвижении фишки вдоль одного из указанных стрелками на рис. 14 направлений на любое расстояние. Ясно, что за конечное число ходов фишка окажется передвинутой в начало координат (отмеченное на графе кружком), и игрок, поставив-

ший фишку в эту вершину, считается выигравшим. Эту игру будем далее для краткости называть игрой Г, а изображенный на рис. 14 граф — *графом игры* Г. Вершина графа, в которой находится (или может находиться) фишка, вместе с указанием, какой игрок имеет очередь хода, будет называться *позицией игры*.

Применительно к игре Г встает вопрос о тех вершинах графа (позициях игры), приходя в которые тот или иной игрок имеет возможность форсировать выигрыш (а его противник тем самым обречен на поражение). Примем следующую программу исследований этого вопроса.

Во-первых, сформулируем достаточно точно понятие выигрывающей позиции для игры Г (а фактически и для всех игр такого типа).

Во-вторых, сформулируем некоторую схему описания множества всех выигрывающих позиций.

В-третьих, опишем выигрывающие позиции в терминах фибоначчиевых представлений (в смысле п. 27 § 1) их координат.

Наконец, в-четвертых, мы перейдем от фибоначчиевых представлений координат выигрывающих позиций к их явным описаниям посредством формул.

Приступим к выполнению этой программы.

12. Мы будем называть позицию *выигрывающей*, если игрок, приведший в нее фишку, гарантирует себе выигрыш, независимо от того, как будет вести себя его противник.

Тривиальным примером выигрывающей позиции в игре Г является вершина $(0, 0)$. Игрок, приведший фишку в эту позицию, уже выиграл, и никаких действий противника уже не последует.

Простым примером выигрывающей позиции является $(1, 2)$. Противник может перейти от нее к одной из позиций $(0, 2)$, $(1, 0)$ или $(0, 1)$. Во всех трех случаях наш игрок от каждой из этих позиций может перейти к $(0, 0)$ и тем самым выиграть. В такой же мере выигрывающей позицией будет и позиция $(2, 1)$.

Более обстоятельно, но не более трудно показывается, что $(3, 5)$ и $(5, 3)$ также суть выигрывающие позиции.

Формально говоря, в приведенное в начале этого пункта определение, а именно в оборот «независимо

от того, как будет вести себя его противник», вкралось новое для нас понятие: «поведение» игрока. Чтобы дальнейшие рассуждения имели смысл, нам надлежит это понятие точно описать.

Представим себе для этого, что каждый из игроков, прежде чем сесть за игру, составил точный план игры, т. е. наметил ход, который он будет делать в этой позиции, как только он в эту позицию попадет. Такой план принято называть *стратегией* игрока. Стратегия игрока в игре Г есть таким образом функция, определенная на множестве всех позиций, причем значением ее на данной позиции P может быть любая позиция, в которую можно из P перейти. Как только оба игрока выбрали свои стратегии, все развитие игры уже можно считать предопределенным, в какой бы позиции фишка первоначально ни находилась: тот игрок, чья очередь хода, передвигает ее в соответствии со своей стратегией в некоторую вполне определенную позицию; но в новой позиции очередь хода будет принадлежать другому игроку, который согласно своей стратегии также должен будет сделать вполне определенный ход; после этого снова наступит очередь первого игрока и т. д. В результате фишка будет проходить по графу однозначно определенный путь.

Теперь мы можем уточнить понятие выигрывающей позиции в игре Г: позиция называется *выигрывающей*, если существует такая стратегия пришедшего в нее игрока А, что какова бы ни была стратегия его противника Б, игрок А приведет фишку в позицию (0, 0).

Важно отметить, что достижение игроком выигрывающей позиции еще ни в коей мере не дает ему оснований играть «спустя рукава». Напротив, это означает лишь то, что для него существует некоторая стратегия (ее естественно также назвать *выигрывающей*), которую ему еще предстоит точно установить и неукоснительно соблюдать.

Ясно, что выигрывающая стратегия должна после каждого хода противника снова приводить игру в одну из выигрывающих позиций. В противном случае, если на каком-то ходе игрок придет не в выигрывающую позицию, то у него не окажется выигрывающего

продолжения, а это противоречит предположению о том, что выбранная им стратегия — выигрывающая.

Таким образом, мы начали с введения «единичного» понятия выигрывающей позиции, но для точного его определения приходится рассматривать и все остальные выигрывающие позиции. Поэтому целесообразно с самого начала говорить одновременно о множестве всех выигрывающих позиций.

13. Рассмотрим некоторое множество позиций R игры на графе Г (или на любом другом ориентированном графе). Оно может обладать (или не обладать) следующими свойствами:

1°. Любой ход в позиции, принадлежащей R, выводит за пределы R. По некоторым довольно глубоким причинам, в которые мы здесь не имеем возможности вдаваться, это свойство множества позиций в игре (и в графе) называется его *внутренней устойчивостью*.

2°. В любой позиции, не принадлежащей R, существует ход, приводящий в позицию из R. Это свойство R называется его *внешней устойчивостью*.

Множества позиций в играх на ориентированных графах, которые являются одновременно внутренне и внешне устойчивыми, имеют большое значение в играх, связанных с поочередными перемещениями по вершинам графа. Такие множества называются *решениями* этих игр (а также решениями графов этих игр). Если фишка в ходе игры оказывается в принадлежащей решению позиции, то игрок, чья очередь хода, обречен все последующие ходы «пытаться уйти из решения»: какой бы ход он ни сделал, по свойству внутренней устойчивости он выведет фишку за пределы решения; но тогда по свойству внешней устойчивости его противник сумеет следующим ходом фишку в решение вернуть.

В рассматриваемой нами игре Г всякая партия заканчивается приведением фишки в начало координат, и игрок, приведший ее туда, выигрывает. Значит, если решение игры содержит начало координат, то игрок, имеющий очередь хода в одной из принадлежащих этому решению позиций, выигрывает. Следовательно, это решение состоит из выигрывающих позиций.

Все сказанное дает нам основание исследовать достаточно подробно вопросы, касающиеся решений игры, содержащих начало координат.

14. Прежде всего установим единственность такого решения.

Лемма. *Для игры* Г *существует не более одного решения, содержащего начало координат.*

Доказательство. Предположим, что, вопреки утверждению леммы, имеется два таких решения, R и S, причем некоторая позиция s_1 из S не принадлежит R. По внешней устойчивости R из позиции s_1 можно перейти в некоторую позицию r_1 из R. Но по внутренней устойчивости S позиция r_1 не может принадлежать S. Значит, по внешней устойчивости S мы можем из r_1 перейти в некоторую позицию s_2 из S, которая (в силу внутренней устойчивости R) не может принадлежать R. Повторяя этот процесс достаточно долго, мы получим последовательность позиций $s_1, r_1, s_2, r_2, \ldots$, которая заканчивается началом координат и в которой каждая позиция принадлежит лишь одному из решений R или S. Значит, и начало координат должно принадлежать только R или только S, и мы получили противоречие.

15. Определяющее, «характеристическое» свойство решения игры R, содержащего начало координат, описывается следующей теоремой.

Теорема. *Пусть* R *— множество позиций в игре* Г, *которое обладает следующими свойствами*:

1) *позиция* $(0, 0)$ *принадлежит* R;

2) *если* (a, b) *принадлежит* R, *то и* (b, a) *принадлежит* R;

3) *для всякого натурального* a *найдется ровно одно натуральное* b, *для которого* (a, b) *принадлежит* R;

4) *для всякого натурального* d *найдется ровно одна пара чисел* (a, b) *из* R, *для которой* $a - b = d$;

5) *если позиции* (a, b) *и* (k, l) *принадлежат* R, *причем* $a < b$, $k < l$ *и* $b - a < l - k$, *то* $a < k$ *и* $b < l$.

Тогда множество R *является решением игры* Г.

Доказательство. Заметим сначала, что, как следует из 3), каждое натуральное число является

координатой ровно в одной симметричной паре (свойство 2)) позиций из R.

Перейдем к установлению свойств внутренней и внешней устойчивости множества R.

а) Внутренняя устойчивость. Пусть (a, b) принадлежит R. Если уменьшить a или b, то возникает пара, сочетающая с b (соответственно с a) другое число, и потому по 3) не принадлежащая R. Если же уменьшить одновременно и одинаково a и b, то получится отличающаяся от (a, b) пара с той же разностью координат и не могущая поэтому в силу 4) принадлежать R.

б) Внешняя устойчивость. Пусть (a, b) не принадлежит R.

Если $a = b$, то от этой вершины можно перейти к вершине $(0, 0)$, которая по 1) принадлежит R.

Если $a \neq b$, то по 3) найдется такое c, что (a, c) принадлежит R, а по 4) найдутся такие k и l, что $l - k = b - a$ и (k, l) принадлежит R. Тогда при $c < b$ от (a, b) можно перейти к (a, c), уменьшив b, а при $c > b$ имеет место $c - a > b - a = l - k$, так что по 5) должно быть $c > l$ и $a > k$, и уменьшение каждой из координат позиции (a, b) на $a - k = b - l$ дает нам позицию (k, l).

Двойная устойчивость установлена, и R оказывается решением.

16. Теперь нетрудно построить некоторый развертывающийся (а по сути дела — рекуррентный) процесс, порождающий позиции из решения R игры Γ, содержащего $(0, 0)$.

Начнем с позиции $(0, 0)$, а затем, уже выписав набор позиций

$$(0, 0), \quad \begin{matrix} (a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n), \\ (b_1, a_1), \ldots, (b_n, a_n), \end{matrix} \tag{4.4}$$

где $a_i < b_i$ для $i = 1, \ldots, n$, положим a_{n+1} равным наименьшему из чисел, не участвовавших в наборах (4.4), и $b_{n+1} = a_{n+1} + (n + 1)$.

Фактически этот процесс приводит к системе позиций

$$(0, 0), \quad \begin{matrix} (1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10), (8, 13), (9, 15), \ldots \\ (2, 1), (5, 3), (7, 4), (10, 6), (13, 8), (15, 9), \ldots \end{matrix}$$

Позиции, составляющие это множество, расположены «почти» на двух лучах, как это видно из рис. 15.

Непосредственно из описанного построения видно, что полученная система позиций удовлетворяет условиям 1)—5) из доказанной в предыдущем пункте теоремы. Следовательно, она является решением игры, а в соответствии с п. 14 — и единственным решением. Заметим, что игра Г имеет еще решения, не содержащие позиции $(0, 0)$. Однако это обстоятельство нас интересовать не будет.

В принципе поставленная нами задача отыскания решения игры Г тем самым решена. Однако множество R, хотя и определено у нас однозначно, но имеет плохо обозримый вид. Изобразим его иначе.

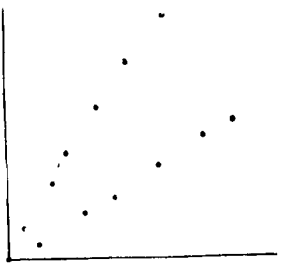

Рис. 15.

17. Пусть, как в п. 27 § 1, $\Phi(t)$ обозначает фибоначчиево представление натурального числа t. Можно считать, что последними фибоначчиевыми цифрами представления каждого из чисел является некоторое количество нулей (если этих нулей нет, то их число, очевидно, равно нулю). Разделим все целые положительные числа на два класса: имеющие в конце своего фибоначчиевого представления четное или нечетное число нулей. Очевидно, каждое число из второго класса может быть получено ровно из одного числа первого класса приписыванием к его фибоначчиеву представлению одного нуля справа. Тем самым натуральные числа объединяются в пары. Покажем, что множество всех таких пар (a, b) (и симметричных им пар (b, a)) вместе с парой $(0, 0)$ удовлетворяют условиям теоремы из п. 15 и тем самым образуют решение игры Г.

Условия 1)—3) выполняются очевидным образом.

Рассмотрим разности сконструированных нами пар и покажем, что каждое значение разности d встречается ровно один раз. Далее, пользуясь фибоначчиевыми представлениями чисел, мы будем для удобства нумеровать фибоначчиевы цифры от низших разрядов

к высшим, т. е. записывать фибоначчиево представление числа в виде $\varphi_n\varphi_{n-1}\ldots\varphi_2$ (где, естественно, φ_2 есть коэффициент при u_2).

Если фибоначчиево представление

$$\Phi(d)=\varphi_l\ldots\varphi_2 \tag{4.5}$$

оканчивается нечетным числом нулей, то возьмем a и b с фибоначчиевыми представлениями

$$\begin{aligned}\Phi(a)&=\varphi_l\ldots\varphi_20,\\ \Phi(b)&=\varphi_l\ldots\varphi_200.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Мы имеем

$$\begin{aligned}b-a&=(\varphi_lu_{l+2}+\ldots+\varphi_2u_4)-(\varphi_lu_{l+1}+\ldots+\varphi_2u_3)=\\&=\varphi_l(u_{l+2}-u_{l+1})+\ldots+\varphi_2(u_4-u_3)=\\&=\varphi_lu_l+\ldots+\varphi_2u_2=d.\end{aligned}$$

Если же $\Phi(d)$ оканчивается четным числом нулей: $\varphi_2=\varphi_3=\ldots=\varphi_{2m+1}=0$ и $\varphi_{2m+2}=1$ $(m\geqq 1)$, то возьмем

$$\begin{aligned}a&=\varphi_l\ldots\varphi_{2m+3}\underbrace{0101\ldots01}_{m+1\text{ раз по }01},\\ b&=\varphi_l\ldots\varphi_{2m+3}\underbrace{0101\ldots010}_{}\end{aligned} \tag{4.7}$$

и подсчитаем

$$\begin{aligned}b-a&=\varphi_lu_{l+2}+\ldots+\varphi_{2m+3}u_{2m+5}+u_{2m+3}+\ldots+u_3-\\&-(\varphi_lu_{l+1}+\ldots+\varphi_{2m+3}u_{2m+4}+u_{2m+2}+\ldots+u_2)=\\&=\varphi_lu_l+\ldots+\varphi_{2m+3}u_{2m+3}+u_{2m+1}+\ldots+u_1,\end{aligned}$$

или, воспользовавшись формулой (1.2),

$$b-a=\varphi_lu_l+\ldots+\varphi_{2m+3}u_{2m+3}+u_{2m+2}=d.$$

Проверим единственность пары с заданной разностью d.

Если $\Phi(d)$ имеет в конце нечетное число нулей, то при другой паре (a, b) и фибоначчиевы представления этих чисел (4.6) были бы иными; но тогда и $\Phi(d)$ было бы иным, а в силу единственности фибоначчиева представления иным было бы и d.

Случай, когда $\Phi(d)$ имеет в конце четное число нулей, по существу, столь же прост, хотя и требует для своего анализа некоторых подсчетов.

Пусть представление

$$\Phi(d) = \mu_k \dots \mu_2$$

оканчивается ровно $2m$ нулями:

$$\mu_2 = \dots = \mu_{2m+1} = 0, \quad \mu_{2m+2} = 1, \quad \mu_{2m+3} = 0,$$

и мы имеем

$$d = \mu_k u_k + \dots + \mu_{2m+4} u_{2m+4} + u_{2m+2}. \tag{4.8}$$

Представим d в виде разности $b - a$, где $\Phi(a)$ имеет в конце четное число нулей, а $\Phi(b)$ получается из $\Phi(a)$ путем приписывания к $\Phi(a)$ еще одного нуля справа.

Пусть

$$a = \varphi_l u_l + \varphi_{l-1} u_{l-1} + \dots + \varphi_3 u_3 + \varphi_2 u_2,$$
$$b = \varphi_l u_{l+1} + \varphi_{l-1} u_l + \dots + \varphi_3 u_4 + \varphi_2 u_3.$$

Тогда

$$d = b - a = \varphi_l u_{l-1} + \varphi_{l-1} u_{l-2} + \dots + \varphi_3 u_2 + \varphi_2 u_1. \tag{4.9}$$

Если при этом $\varphi_2 = 0$, то $\varphi_l \varphi_{l-1} \dots \varphi_3$ является фибоначчиевым представлением d, и по единственности такого представления его цифры должны совпадать с цифрами из (4.8). В том числе должно быть

$$\varphi_2 = \varphi_3 = \dots = \varphi_{2m+2} = 0, \quad \varphi_{2m+3} = 1,$$

т. е. фибоначчиево представление числа a оканчивается нечетным числом нулей, что противоречит выбору чисел a и b. Значит, $\varphi_2 = 1$. Но тогда

$$d - 1 = \varphi_l u_{l-1} + \varphi_{l-1} u_{l-2} + \dots + \varphi_3 u_2$$

и

$$\Phi(d-1) = \varphi_l \varphi_{l-1} \dots \varphi_3, \tag{4.10}$$

а с другой стороны, из (4.8) следует, что

$$d - 1 = \mu_k u_k + \dots + \mu_{2m+4} u_{2m+4} + u_{2m+2} - 1 =$$
$$= \mu_k u_k + \dots + \mu_{2m+4} u_{2m+4} + u_{2m+1} + u_{2m-1} + \dots + u_3,$$

так что

$$\Phi(d-1) = \mu_k \dots \mu_{2m+4} 00101 \dots 010.$$

В силу единственности фибоначчиева представления вместе с (4.10) это дает

$$k = l - 1, \quad \mu_k = \varphi_l, \dots, \mu_{2m+4} = \varphi_{2m+5}, \quad \varphi_{2m+4} = 0,$$
$$\varphi_{2m+3} = \varphi_{2m+1} = \dots = \varphi_3 = 0,$$
$$\varphi_{2m+2} = \varphi_{2m} = \dots = \varphi_4 = 1.$$

Кроме того, как уже указывалось, $\varphi_2 = 1$. Следовательно, a, а потому и b, обязаны иметь вид из формулы (4.7).

Это значит, что соблюдается условие 4).

Наконец, ясно, что в условиях выполненного построения с ростом разности координат позиции должны возрастать и сами координаты. Это значит, что выполняется 5).

Таким образом, построенная система пар чисел является решением игры Г, содержащим (0, 0). Ввиду доказанной единственности такого решения она должна совпадать с результатом построения из п. 16.

Фибоначчиевы представления чисел позволяют для каждого натурального числа непосредственно указывать «парное» ему. Найдем, например, «пару» к числу 31. Для этого числа мы имеем $\Phi(31) = 1010010$. Полученное представление оканчивается одним нулем. Значит, представление, парное к нему, получается в результате отбрасывания последнего нуля, т. е. будет 101001; оно является фибоначчиевым представлением числа $13 + 5 + 1 = 19$.

18. Попытаемся изгнать из описания полученного решения игры Г последние заключенные в фибоначчиевых представлениях остатки рекуррентности. Как естественно ожидать (см., например, вывод формулы Бине в п. 16 § 1), это будет связано с использованием числа $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Предварительно докажем вспомогательную лемму, значение которой выходит за пределы рассматриваемого нами сейчас вопроса.

Лемма. *Пусть* γ *и* δ *— положительные иррациональные числа, для которых*

$$\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = 1. \tag{4.11}$$

Тогда среди чисел

$$\begin{aligned} a_n &= [n\gamma], \quad n = 1, 2, \ldots, \\ b_n &= [n\delta], \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{4.12}$$

(где квадратные скобки означают целую часть стоящих внутри них чисел) *любое натуральное число встретится ровно по разу.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что $\gamma, \delta > 1$. Возьмем далее произвольное натуральное N и рассмотрим все натуральные значения n, для которых $[n\gamma] < N$, т. е. $n\gamma < N$, или $n < \frac{N}{\gamma}$, так что этому неравенству удовлетворяют все натуральные числа $n = 1, 2, \ldots, \left[\frac{N}{\gamma}\right]$.

Аналогично для всех $n = 1, 2, \ldots, \left[\frac{N}{\delta}\right]$ будет $[n\delta] < N$. Значит, среди чисел $1, 2, \ldots, N$ будет всего $\left[\frac{N}{\gamma}\right] + \left[\frac{N}{\delta}\right]$ чисел вида 4.12). Но числа $\frac{N}{\gamma}$ и $\frac{N}{\delta}$ не являются целыми. Значит,

$$\frac{N}{\gamma} - 1 < \left[\frac{N}{\gamma}\right] < \frac{N}{\gamma}, \quad \frac{N}{\delta} - 1 < \left[\frac{N}{\delta}\right] < \frac{N}{\delta}.$$

Поэтому, складывая эти неравенства и учитывая (4.11), мы получаем

$$N\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}\right) - 2 =$$

$$= N - 2 < \left[\frac{N}{\gamma}\right] + \left[\frac{N}{\delta}\right] < N\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta}\right) = N.$$

Значит, средняя часть написанного соотношения есть целое число, лежащее строго между $N - 2$ и N. Таким числом является $N - 1$:

$$\left[\frac{N}{\gamma}\right] + \left[\frac{N}{\delta}\right] = N - 1.$$

Таким образом, для любого натурального N среди чисел, меньших N, будет ровно $N - 1$ чисел вида (4.12): ими будут все натуральные числа, меньше N. Нам остается сослаться на произвольность числа N.

19. Пары чисел $([n\gamma], [n\gamma])$ удовлетворяют условиям 1)—3) теоремы п. 15. Чтобы они удовлетворяли также условиям 4) и 5) этой теоремы, нужно, чтобы при любом натуральном n было

$$b_n - a_n = [n\delta] - [n\gamma] = n.$$

Но так как

$$n = n + [n\gamma] - [n\gamma] = [n + n\gamma] - [n\gamma] = [n(1 + \gamma)] - [n\gamma],$$

это равносильно тому, чтобы при любом n было

$[n\delta]=[n(1+\gamma)]$. Но, как легко проверить, последнее возможно лишь при $\delta=1+\gamma$, т. е. ввиду (4.11) — при

$$\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma+1}=1,$$

откуда

$$2\gamma+1=\gamma(\gamma+1),$$

или

$$\gamma^2-\gamma-1=0,$$

так что ввиду положительности γ —

$$\gamma=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\alpha,$$

и

$$\delta=1+\alpha=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом, координаты выигрывающих позиций в игре Г поддаются непосредственному вычислению как пары

$$\left(\left[n\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right],\ \left[n\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]\right).$$

20. Закончим наше изложение небольшой геометрической шуткой. Сейчас мы наглядно «докажем», что 64=65. Возьмем для этого квадрат со стороной 8

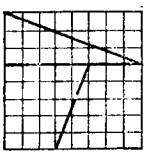

Рис. 16.

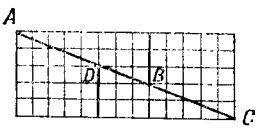

Рис. 17.

и разрежем его на четыре части, как это показано на рис. 16. Эти части мы сложим в прямоугольник (рис. 17) со сторонами 13 и 5, т. е. с площадью, равной 65.

Объяснение этому, на первый взгляд загадочному, явлению найти нетрудно. Все дело в том, что точки

A, B, C и D на рис. 17 на самом деле не лежат на одной прямой, а являются вершинами параллелограмма, площадь которого как раз и равна «лишней» единице.

Это правдоподобное, но неверное «доказательство» заведомо ложного высказывания (такие «доказательства» называются софизмами), можно проделать еще более наглядно и «убедительно», если вместо квадрата со стороной 8 взять квадрат со стороной, равной некоторому числу Фибоначчи с достаточно большим четным номером, u_{2n}. Разобьем этот квадрат на части (рис. 18) и сложим из этих частей прямоугольник

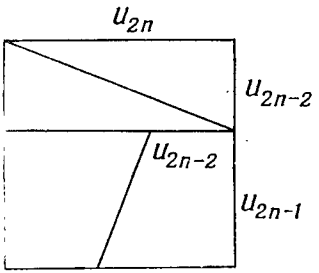

Рис. 18.

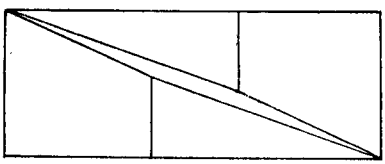

Рис. 19.

(рис. 19). «Пустота» в виде параллелограмма, вытянутого вдоль диагонали прямоугольника, на основании п. 9 § 1 имеет площадь, равную единице. Наибольшая ширина этой щели, т. е. высота параллелограмма, равна, как легко вычислить,

$$\frac{1}{\sqrt{u_{2n}^2 + u_{2n-2}^2}}.$$

Поэтому если мы возьмем квадрат со стороной 21 см и «превратим» его в прямоугольник со сторонами 34 и 13 см, то наибольшая ширина щели получится

$$\frac{1}{\sqrt{21^2 + 8^2}} \text{ см},$$

т. е. около 0,4 мм, что почти незаметно для глаза.

§ 5. ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ И ТЕОРИЯ ПОИСКА

1. Известно, что при очень малых скоростях автомобиль расходует на каждый километр пути сравнительно много бензина. Велик его расход и на больших скоростях. Какая-то промежуточная скорость является при этом «оптимальной»: при передвижении с этой скоростью автомобиль расходует на километр пути наименьшее количество горючего. Таким образом, мы можем предполагать, что примерный график зависимости расхода автомобилем горючего на километр пути от скорости автомобиля имеет вид, изображенный на рис. 20: сначала, по мере роста скорости, километровый расход горючего убывает до некоторой минимальной величины, а потом, с дальнейшим ростом скорости, начинает неуклонно (как принято говорить в математике, «монотонно») возрастать.

Хотя общие очертания графика этой зависимости (сначала спуск, а потом подъем) одинаковы практически для всех автомобилей, его точная форма может несколько изменяться даже в пределах автомобилей одного типа, завися от индивидуальных особенностей машины, от степени износа тех или иных ее механизмов и устройств и т. д. В частности, и минимум на нашем графике также может располагаться в довольно широких пределах.

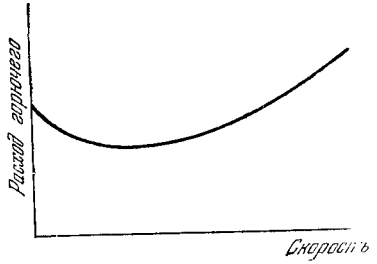

Рис. 20.

Предположим теперь, что мы получили в свое распоряжение автомашину и хотим предпринять путешествие по такой местности, где в пути не удастся заправиться топливом. Для того чтобы иметь возможность проехать наибольшее расстояние, мы должны достаточно точно определить скорость, соответствующую минимальному расходу горючего. Эта скорость обычно называется *наиболее экономичной скоростью.*

Определять наиболее экономичную скорость автомобиля естественнее всего опытным путем, проезжая

с различными скоростями километровые участки дороги, характер и качество которой типичны для условий предстоящего путешествия, и замеряя каждый раз расход бензина. Так как это занятие не из веселых, естественно задуматься над следующими вопросами: сколько опытов достаточно поставить для того, чтобы определить наиболее экономичную скорость автомобиля с заданной точностью? На каких скоростях следует определять в этих опытах расходы горючего? Близкими к этим вопросам являются следующие два: как организовать данное число опытов, чтобы найти экономичную скорость с наибольшей точностью? Какова эта наибольшая точность?

При этом под определением наиболее экономичной скорости «*с точностью до данного* ε» мы будем понимать указание такой скорости v, что истинное значение наиболее экономичной скорости лежит между $v-\varepsilon$ и $v+\varepsilon$ (т. е. что ошибка в определении этой скорости не может превосходить ε).

Для определенности будем считать заранее известным, что наиболее экономичная скорость нашего автомобиля лежит между некоторыми пределами v' и v''. В качестве v' следует взять скорость, которая заведомо не превосходит наиболее экономичной, а в качестве v'' — такую скорость, которая заведомо не меньше ее. (Например, в качестве v' можно взять наименьшую скорость, при которой еще возможна устойчивая работа мотора, а в качестве v'' — максимальную скорость данного автомобиля.)

2. Отвлекаясь от описанного только что конкретного примера, рассмотрим следующую математическую задачу.

Пусть нам о функции $f(x)$ известно только то, что она от заданного x' до некоторого неизвестного $\bar{x}$ убывает, а от этого $\bar{x}$ до заданного x'' возрастает (рис. 21). В частности, мы допускаем, что неизвестная точка $\bar{x}$ в действительности совпадает с одним из концов отрезка, x' или x''. Очевидно, в этом случае функция будет все время возрастать (рис. 22) или все время убывать (рис. 23). Разумеется, если один из последних двух случаев и имеет место, то мы будем предполагать это обстоятельство заранее не известным. В точке $\bar{x}$ функция f принимает свое наименьшее

значение $f(\bar{x})$, которое называется ее «минимальным» значением или, короче, минимумом. О точке $\bar{x}$ обычно в таких случаях говорят, что на ней функция *достигает минимума*. Ее также часто называют *«минимизирующей» точкой* функции.

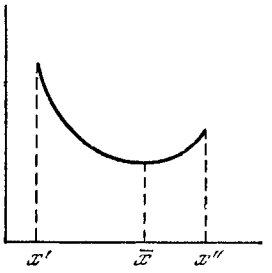

Рис. 21.

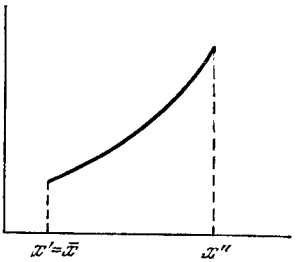

Рис. 22.

Итак, мы далее будем рассматривать только такие функции, в которых убывание не может следовать за возрастанием. Такие функции мы будем в дальнейшем для краткости называть *«функциями с одним минимумом»*.

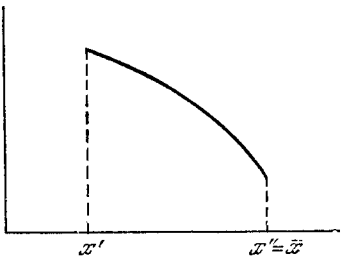

Рис. 23.

Содержание данного параграфа состоит в том, чтобы проанализировать возможности точного определения положения минимизирующей точки функции f с одним минимумом. То, что функция f является функцией с одним минимумом, мы далее будем все время предполагать, не оговаривая каждый раз. Совершенно ясно, что *с соответствующими изменениями все то, что мы далее будем говорить о минимумах (наименьших значениях) функций, справедливо и для их максимумов (наибольших значений)*.

3. В поставленной проблеме, как и в широком круге аналогичных ей проблем, участвуют три фактора: *цели*, которые мы перед собой ставим, *возмож-*

ности, которыми мы располагаем для осуществления этих целей, и, наконец, те *условия*, в которых мы используем наши возможности для достижения целей.

В нашем случае цель состоит в повышении точности определения минимизирующей точки, т. е. в уменьшении ошибки, с которой указывается эта точка.

Возможности состоят в точном определении тем или иным путем (вычислением, измерением или, на худой конец, простым угадыванием) некоторого числа значений функции f в произвольно выбираемых нами точках и в сравнениях между собой найденных в различных точках значений по их величине.

Наконец, условия определяются величиной области задания функции f, т. е. длиной L отрезка между x' и x''.

В соответствии со сказанным каждая конкретная задача поиска может иметь три аспекта.

1) Насколько осуществима поставленная цель при данных возможностях и в данных условиях? Применительно к интересующему нас вопросу это означает следующее.

Пусть мы имеем право совершить n последовательных определений значения f, выбирая каждый раз точку определения по своему усмотрению. В каких точках следует определять значения функции, чтобы точка $\bar{x}$ определилась с наибольшей точностью, и какова эта точность?

2) Какими возможностями необходимо располагать, чтобы осуществить поставленную цель в данных условиях?

В нашей задаче этот вопрос можно конкретизировать так. Пусть мы хотим определить минимизирующую функцию f точку $\bar{x}$ с заданной точностью ε, т. е. указать такое x, что $\bar{x}$ расположено между $x-\varepsilon$ и $x+\varepsilon$. Сколько определений значений функции f для этого необходимо произвести и как эти определения организовать?

3) В каких условиях данные возможности достаточны для достижения поставленной цели?

В данном случае речь идет о нахождении наибольшего интервала L изменения функции f (т. е. наибольшего значения разности $x''-x'$), для которого суще-

ствует способ определения минимизирующей f точки с заданной точностью ε за n наблюдений.

4. Строго говоря, нам придется сейчас иметь дело не с одной задачей, а с двумя.

Во-первых, речь может идти о нахождении минимизирующей точки $\bar{x}$ *вместе* с тем значением $f(\bar{x})$, которое функция в этой точке принимает.

Во-вторых, мы можем интересоваться *только* самой точкой $\bar{x}$, оставаясь равнодушным к значению $f(\bar{x})$.

Совершенно ясно, что в первой из этих задач (будем далее ее называть задачей *А*) наши цели шире, чем во второй (которую мы назовем задачей *Б*). Поэтому естественно ожидать:

что при заданных возможностях и условиях цели задачи *А* удастся осуществить в меньшей степени, чем цели задачи *Б* (при данном числе n и длине L в задаче *Б* удается получить меньшее ε, чем в задаче *А*);

что для осуществления в равной мере целей обеих задач при одинаковых условиях в задаче *А* необходимы бóльшие возможности (при одной и той же погрешности ε и одинаковых длинах L интервалов изменения функции в задаче *А* необходимо, вообще говоря, большее n);

что одинаковое осуществление целей при равных возможностях требует в задаче *А* более легких условий (данные ε и n в задаче *А* совместимы лишь с меньшими значениями L, чем в задаче *Б*).

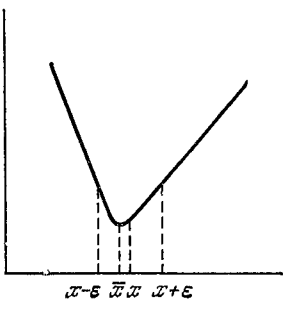

Рис. 24.

5. Чтобы сделать сформулированные задачи математически вполне четкими, необходимо разъяснить следующее важное обстоятельство.

Допустим, что мы интересуемся возможностями определения минимизирующей точки $\bar{x}$ в отрезке длины L (очевидно, мы можем считать началом этого отрезка точку 0 на оси координат, а концом — точку L) с точностью ε. Будем считать, что мы решаем задачу *А*, т. е. что $\bar{x}$ интересует нас вместе со значением $f(\bar{x})$.

Предположим, что мы избрали следующий способ определения $\bar{x}$.

Выберем совершенно произвольно некоторое x между 0 и L и определим значения функции f в точках $x-\varepsilon$, x и $x+\varepsilon$, т. е. вычислим величины

$$f(x-\varepsilon),\ f(x),\ f(x+\varepsilon)$$

(рис. 24). Разумеется, при всей произвольности выбора x мы считаем, что все-таки $x-\varepsilon \geqq 0$, так что значение функции $f(x-\varepsilon)$ можно фактически вычислить; точно так же мы принимаем, что $x+\varepsilon \leqq L$.

Вполне может случиться, что

$$f(x-\varepsilon) > f(x) < f(x+\varepsilon).$$

Это значит, что функция f, убывающая в $x-\varepsilon$, при переходе к $x+\varepsilon$ начинает возрастать. Но переход от убывания функции к возрастанию неизбежно связан с ее прохождением через наименьшее значение. В данном случае это наименьшее значение функции f должно достигаться на некотором $\bar{x}$, лежащем между $x-\varepsilon$ и $x+\varepsilon$.

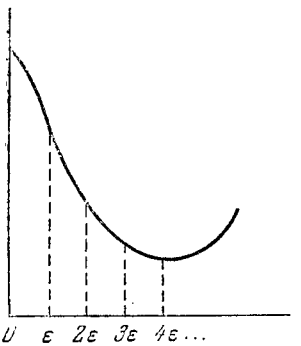

Рис. 25.

Поэтому x будет отстоять от $\bar{x}$ не более, чем на ε, и x окажется как раз тем приближенным значением $\bar{x}$, которое мы ищем. В этом случае определение искомого $\bar{x}$ осуществляется в результате всего-навсего трех наблюдений. Такое, повторяем, *может случиться*. Однако никакой гарантии того, что это *действительно произойдет*, мы не имеем. Более того, если длина L отрезка велика, а ε мало́, то наступление этого явления может показаться довольно неожиданным. Наоборот, в этом случае вполне правдоподобно, что вблизи трех выбранных нами точек функция f будет принимать сравнительно большие значения, а минимума своего она будет достигать где-нибудь совсем в другом месте. Следовательно, трех наблюдений может хватить, а может и не хватить.

Нам же нужен план действий, *неизбежно* приводящий к определению $\bar{x}$ с точностью до ε, где бы в действительности эта точка x ни лежала. Такие планы существуют. Будем, например, систематически вычислять значения нашей функции

$$f(0),\ f(\varepsilon),\ f(2\varepsilon),\ \ldots \qquad (5.1)$$

до тех пор, пока не дойдем до такого $f(r\varepsilon)$, что $(r+1)\varepsilon$ будет больше, чем L (рис. 25). Ясно, что то $k\varepsilon$, для которого значение функции будет наименьшим в последовательности (5.1), и окажется искомым.

Смысл решаемых нами задач состоит в том, что мы хотим составить не просто план действий, дающий во всех и в том числе в наименее благоприятных случаях жизни значение $\bar{x}$ с предписанной точностью, а *наиболее экономичный* из таких планов, т. е. план, *«наилучший в наихудших условиях»*. Но наихудшими условиями являются те, в которых число вычисляемых значений функции f максимально. Аналогично наиболее экономичным планом является такой план, который осуществляет поставленную цель с минимальным числом вычислений значений функции.

Поэтому наилучший в наихудших условиях план часто называют *минимаксимальным* планом, или планом *минимакса*. Мы будем этот план называть *оптимальным*.

Сущность действий, предписываемых оптимальным планом (как в этой, так и в любой аналогичной задаче), можно охарактеризовать как наиболее целесообразные поиски «прячущегося» от нас минимума функции, «стремящегося оказаться как раз не там, где мы его ищем». Сказанное не имеет ничего общего ни с мистикой, ни с суевериями, а является лишь характеристикой тех наихудших обстоятельств, применительно к которым мы и квалифицируем наши действия как наилучшие.

6. Важно отметить, что не для всякой задачи поиска существуют оптимальные планы. Так, например, в задаче *Б* оптимального плана нет.

В самом деле, пусть $L = 2$ и $n = 2$. Какую точность определения ε мы можем при этом гарантировать?

Будем считать концами нашего отрезка числа 0 и 2. Возьмем произвольно малое положительное ε и вычислим значения функции f в точках $1-\varepsilon$ и $1+\varepsilon$. Если при этом

$$f(1-\varepsilon) \leqq f(1+\varepsilon),$$

то искомый минимум $\bar{x}$ должен лежать между нулем и $1+\varepsilon$, а если

$$f(1-\varepsilon) \geqq f(1+\varepsilon),$$

то $\bar{x}$ расположено между $1-\varepsilon$ и 2.

Положим в первом случае

$$\bar{x} = \frac{1+\varepsilon}{2},$$

а во втором —

$$\bar{x} = \frac{(1-\varepsilon)+2}{2} = \frac{3-\varepsilon}{2}.$$

В наихудшем случае так определяемое $\bar{x}$ отличается от истинного минимума функции f на $\frac{1+\varepsilon}{2}$. Приближая ε к нулю, мы уменьшаем ошибку. Однако ε не может обратиться в нуль (ибо тогда точки $1-\varepsilon$ и $1+\varepsilon$ совпадут, и сравнение значения функции $f(1-\varepsilon)$ с заведомо равным ему значением $f(1+\varepsilon)$, вычисленным в той же точке, не даст нам никакой информации). Поэтому погрешность всегда остается большей, чем половина, хотя и может быть сделана сколь угодно близкой к этому числу.

Каждое положительное значение ε определяет здесь некоторый план. Чем ближе ε к нулю, тем этот план лучше. Так как для любого $\varepsilon > 0$ найдется еще меньшее положительное число, для любого плана найдется еще лучший. Следовательно, оптимального плана для задачи $Б$ нет.

Однако для задачи $Б$ существуют «почти оптимальные» планы, приводящие к таким результатам, которые можно улучшить лишь незначительно. Говоря точнее, каково бы ни было число $\gamma > 0$, существует такой план P_γ, что никакой другой план не сможет уменьшить даваемую планом P_γ ошибку больше, чем на γ.

7. План, описываемый последовательностью (5.1) при ε, достаточно малом по сравнению с длиной L рассматриваемого нами отрезка, оптимальным не яв-

ляется. Придерживаясь этого плана, нам придется в наихудших условиях выполнить все r вычислений.

Попробуем, однако, поступить несколько иначе. Будем вычислять члены последовательности (5.1) через один:

$$f(0),\ f(2\varepsilon),\ f(4\varepsilon),\ \ldots;$$

найдем в полученной последовательности наименьший из членов (пусть им будет $f(2k\varepsilon)$) и вычислим два значения функции $f((2k-1)\varepsilon)$ и $f((2k+1)\varepsilon)$. То из трех значений переменной $(2k-1)\varepsilon$, $2k\varepsilon$ и $(2k+1)\varepsilon$, при котором значение функции f будет наименьшим из трех

$$f((2k-1)\varepsilon),\quad f(2k\varepsilon),\quad f((2k+1)\varepsilon),$$

очевидно, и есть $\bar{x}$ с точностью до ε. Этот новый план приводит в наихудших условиях к цели после выполнения примерно $\frac{r}{2}+2$ вычислений. При больших r это существенно меньше, чем число вычислений, требуемых первым планом.

Итак, первый план не является оптимальным. По сходным причинам второй план также нельзя, вообще говоря, считать оптимальным.

Однако второй план отличается от первого одной весьма существенной чертой: предусматриваемые им точки определения значений функции планируются заранее лишь частично, а выбор оставшихся точек осуществляется на основе сравнений уже вычисленных значений функции. Интуитивно совершенно ясно, что выбор наилучших действий всегда должен быть связан с использованием информации о результатах действий, которые мы уже произвели. Второй план является в этом отношении более совершенным, чем первый. Но и он, вообще говоря, поддается дальнейшим усовершенствованиям, которые в конце концов приведут нас к оптимальному плану.

Естественно в процессе определения местонахождения минимума функции сравнивать каждое вновь получаемое значение функции с теми или иными из ее значений, полученных при предыдущих наблюдениях. Выбор точки, в которой будет производиться следующее измерение (или решение о прекращении дальнейших измерений), будет поэтому как-то зави-

сеть, во-первых, от тех точек, в которых значения функции нами вычислены, а во-вторых, от самих вычисленных значений функции.

Очевидно, такой процесс последовательного вычисления значений функции f вполне определяется некоторым законом, ставящим в соответствие для любого $k \geqq 0$ произвольным наборам точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и значений функции f в этих точках ту или иную точку x_{k+1} или же решение закончить наблюдения над функцией f, приняв ту или иную точку в качестве $\bar{x}$. Этот закон соответствия принято называть *решающей функцией*.

Каждый план определяет некоторую решающую функцию. Точно так же и всякая решающая функция определяет некоторый план. В сущности, решающая функция — это и есть четкое и формализованное описание плана. Например, решающая функция, определяющая первый из рассмотренных в предыдущем пункте планов, ставит в соответствие каждому числу $0 \leqq k < r$ точку $(k+1)\varepsilon$, а числу r — окончание процесса.

Понятие решающей функции принадлежит к числу важнейших понятий современной математики. К сожалению, точное определение этого понятия довольно громоздко и не может быть здесь приведено.

8. Пусть цель плана P состоит в определении с наименьшей погрешностью точки $\bar{x}$, минимизирующей функцию f на отрезке длины L на основе n наблюдений. Такой план мы далее будем называть *n-шаговым*.

Пусть в условиях некоторого n-шагового плана P удается определить $\bar{x}$ на отрезке длины L с точностью до ε. Эта точность зависит от самого плана P, а также от n и от L. Поэтому мы можем считать ее функцией от P, n и L и обозначать для задачи A через $\tau_P^A(n, L)$, а для задачи $Б$ — через $\tau_P^Б(n, L)$. Под $\tau_P(n, L)$ далее будет подниматься любое (но, конечно, в пределах одного рассуждения одно и то же) из выражений $\tau_P^A(n, L)$ и $\tau_P^Б(n, L)$.

n-шаговый план P_0 определения минимума f на отрезке длины L является оптимальным в задаче A, если $\tau_{P_0}^A(n, L)$ не более, чем $\tau_P^A(n, L)$ для любого другого плана P, т. е.

$$\tau_{P_0}^A(n, L) \leqq \tau_P^A(n, L).$$

Это можно также записать как

$$\tau_{P_0}^A(n, L) = \min_P \tau_P^A(n, L) \qquad (5.2)$$

Число $\tau^A_{P_0}(n, L)$, таким образом, оказывается характеристикой уже не плана, а самой задачи (именно, задачи нахождения за n шагов минимизирующей точки функции f на отрезке длины L). Поэтому оно не зависит от какого-либо плана, а зависит только от n и L и может быть просто обозначено через $\tau^A(n, L)$.

В условиях задачи $Б$ дело обстоит несколько сложнее. Здесь, как мы уже видели, *нет* оптимального плана, гарантирующего в наихудших условиях наименьшую погрешность. Однако существует такая погрешность, к которой можно подойти сколь угодно близко, если только выбрать подходящий план. Эта погрешность, которую естественно называть *предельной погрешностью*, также зависит только от условий задачи. Поэтому ее естественно обозначить через $\tau^Б(n, L)$. Любой план приводит к большей погрешности:

$$\tau^Б(n, L) < \tau^Б_P(n, L),$$

и поэтому мы не можем написать здесь равенство, аналогичное (5.2).

Забегая несколько вперед, скажем, что итог всех рассуждений этого параграфа, подчас довольно сложных, состоит в получении явных выражений для $\tau^A(n, L)$ и $\tau^Б(n, L)$. Как окажется, в эти выражения входят числа Фибоначчи:

$$\tau^A(n, L) = \frac{L}{u_{n+2}}; \tag{5.3}$$

$$\tau^Б(n, L) = \frac{L}{2u_{n+1}}. \tag{5.4}$$

Таким образом, отказ от нахождения минимального значения функции позволяет увеличить точность определения ее минимизирующей точки в $\frac{2u_{n+1}}{u_{n+2}}$ раз. Для достаточно больших n это отношение согласно п. 26 § 1 близко к $\frac{2}{\alpha} = 1{,}236$, что соответствует увеличению точности примерно на 23%.

9. Совершенно ясно, что для всех дальнейших рассуждений важны не каждое из чисел L и ε само по себе, а отношение L и ε. Это отношение является

относительной ошибкой положения $\bar{x}$. Если это отношение нам дано, то мы можем, выбирая надлежащим образом единицу измерения величины x (т. е. единицу измерения длины нашего отрезка), взять одно из чисел L и ε совершенно произвольно.

Это соображение приводит к весьма поучительному выводу.

Изменение масштаба вдоль оси x изменяет как численное выражение длины отрезка L, так и ошибку в определении положения искомой точки любым планом P в одно и то же число раз. Другими словами, для любого положительного λ должно быть

$$\tau_P(n, \lambda L) = \lambda \tau_P(n, L). \tag{5.5}$$

Точно так же, если мы будем в описании плана определения минимизирующей точки указывать положения тех или иных точек отрезка не в абсолютных мерах длины, а в относительных, то оптимальность плана не нарушится: в результате такого изменения в описании планов оптимальные планы останутся оптимальными, а неоптимальные — неоптимальными.

Отсюда непосредственно следует, что равномерное растяжение (или сжатие) интервала изменения функции f в любое число раз осуществляет лишь «подобное преобразование» оптимального плана, не нарушая при этом его оптимальности.

Значит, ошибки $\tau_P(n, \lambda L)$ и $\tau_P(n, L)$, фигурирующие в равенстве (5.5), достигаются не просто в результате осуществления тех или иных планов, а могут быть достигнуты в результате применения одного и того же плана, различным образом «подобно преобразованного».

10. После всех этих достаточно затянувшихся предварительных рассмотрений перейдем к нахождению оптимального плана для задачи A и к доказательству формул (5.3) и (5.4).

Лемма. *Каковы бы ни были* $n \geqq 1$ *и* L, *существует* n*-шаговый план поиска точки* $\bar{x}$, *минимизирующей значение функции* f (*с одним минимумом*) *на отрезке длины* L *за* n *шагов и обладающей следующими свойствами*:

1) *на каждом шаге рассматривается некоторый отрезок* $x'x''$;

2) *на первом шаге вычисляется значение функции* f *в одной из точек:* $\frac{u_n}{u_{n+2}}L$ *или* $\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}L$;

3) *к началу каждого из последующих шагов с номером* k *(т. е. при* $1 < k \leqq n$*) известно значение* f *в одной из следующих точек:*

$$x_1 = x' + \frac{u_n}{u_{n+2}}(x'' - x') \quad и \quad x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x'); \quad (5.6)$$

4) *на* k*-м* $(1 < k \leqq n)$ *шаге вычисляется значение в другой из точек* (5.6);

5) *на* k*-м* $(1 < k \leqq n)$ *шаге производится сравнение чисел* $f(x_1)$ *и* $f(x_2)$; *при этом, если окажется, что* $f(x_1) \leqq f(x_2)$, *то на* $(k+1)$*-м шаге рассматривается отрезок* $x'x_2$, *а если* $f(x_1) \geqq f(x_2)$, *то отрезок* x_1x''.

Доказательство ведется индукцией по n.

Если $n = 1$, то, очевидно, мы имеем дело с отрезком от 0 до L; значение функции f вычисляется в точке $\frac{u_1}{u_3}L = \frac{L}{2}$; последующих же шагов в этом случае вообще нет.

Предположим теперь, что существование некоторого n-шагового плана с требуемыми в условиях леммы свойствами нами уже установлено для любого отрезка. Займемся построением интересующего нас $(n+1)$-шагового плана, проверяя параллельно соблюдение условий леммы. Будем на каждом шаге рассматривать некоторый отрезок $x'x''$.

Возьмем в качестве первого шага выбор точки $x_1 = \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}}L$, а в качестве второго — выбор точки $x_2 = \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L$ и сравнение значений функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$. В случае, когда $f(x_1) \leqq f(x_2)$, мы приходим к рассмотрению отрезка между 0 и x_2 (здесь 0 играет роль x', а x_2 — роль x''), а в случае $f(x_1) > f(x_2)$ — к рассмотрению отрезка между x_1 и L (здесь x_1 выступает в роли x', а L в роли x''). Длина рассматриваемого отрезка в обоих случаях равна $\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L$.

После выполнения этих двух шагов мы находимся применительно к рассматриваемому отрезку точно в таких же условиях, что и при осуществлении n-шагового процесса после выполнения его первого шага.

Именно, на отрезке длины $\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L$ известно значение функции f в точке, отстоящей на $\frac{u_{n+1}}{u_{n+3}}L$ от одного из его концов. Поэтому мы можем «перейти» на этот n-шаговый процесс и довести его до конца. На основании индуктивного предположения мы можем считать, что для последних n шагов выполняются условия 3), 4) и 5). Следовательно, нам остается рассмотреть условия начала второго шага и его проведения. Но, очевидно, точка $\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}L$ имеет вид первого из выражений (5.6) для случая $k=2$, если вместо n в него подставить $n+1$, а роль второго выражения в соответствующей ситуации играет выбираемая нами точка $\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L$.

Этим индуктивный переход обоснован и лемма доказана.

11. Будем называть n-шаговый план, существование которого было доказано в предыдущей лемме, *n-шаговым фибоначчиевым планом*, или, короче, *планом* Φ_n.

Теорема. 1) *План* Φ_n *является единственным оптимальным n-шаговым планом.*

2) $\tau^A_{\Phi_n}(n, L)=\frac{L}{u_{n+2}}$.

Доказательство ведется индукцией по n.

Рассмотрим сначала одношаговый план, состоящий в выборе в качестве $\bar{x}$ некоторой точки $\tilde{x}$ из интервала от x' до x''. Очевидно, в наименее благоприятных условиях ошибка может достигнуть здесь наибольшего из чисел $x''-\tilde{x}$ и $\tilde{x}-x'$. Если эти числа различны, то эта максимальная ошибка превосходит $\frac{L}{2}$, если же они равны, то максимальная ошибка равна $\frac{L}{2}$.

Таким образом, план Φ_1 является оптимальным одношаговым планом, а

$$\tau^A_{\Phi_1}(1, L)=\frac{L}{2}=\frac{L}{u_3}.$$

При $n=2$ мы имеем дело с планом Φ_2, состоящим в вычислении и сравнении значений функции $f\left(\frac{1}{3}L\right)$ и $f\left(\frac{2}{3}L\right)$ и выбора в качестве $\bar{x}$ точки

$$\frac{1}{3}L, \quad \text{если} \quad f\left(\frac{1}{3}L\right) \leqq f\left(\frac{2}{3}L\right),$$

$$\frac{2}{3}L, \quad \text{если} \quad f\left(\frac{1}{3}L\right) > f\left(\frac{2}{3}L\right).$$

Максимальная ошибка в определении истинного значения $\bar{x}$ здесь, как легко видеть, достигает $\frac{L}{3}=\frac{L}{u_4}$:

$$\tau^A_{\Phi_2}(2, L)=\frac{L}{u_4}.$$

Любой иной выбор точки будет приводить к бóльшим возможным ошибкам.

Основание индукции, таким образом, доказано.

Предположим теперь, что фибоначчиев план Φ_n обладает требуемым в условиях теоремы свойством, и рассмотрим $(n+1)$-шаговые планы.

Произведя в плане Φ_{n+1} первые два наблюдения над функцией f, мы в результате сравнения двух ее найденных значений сведем дело к применению к отрезку длины $\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L$, в котором известно значение f в одной из точек, плана Φ_n, что даст нам в наименее благоприятном случае ошибку

$$\tau^A_{\Phi_n}\left(n, \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}L\right)=\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}\tau^A_{\Phi_n}(n, L)=\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}}\frac{L}{u_{n+2}}=\frac{L}{u_{n+3}}.$$

Следовательно, $\tau^A_{\Phi_{n+1}}(n+1, L)=\frac{L}{u_{n+3}}$.

Нам остается показать, что план Φ_{n+1} оптимален.

Возьмем с этой целью наблюдения над функцией f в двух произвольных точках, $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ (для определенности будем считать, что $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2$). Сопоставление значения $f(\tilde{x}_1)$ с $f(\tilde{x}_2)$ приводит к поискам точки $\bar{x}$ либо на отрезке от 0 до $\tilde{x}_2$, либо на отрезке от $\tilde{x}_1$ до L.

Если

$$\tilde{x}_1 < \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}}L,$$

то в случае $f(\tilde{x}_1) > f(\tilde{x}_2)$ нам придется искать по не-

которому n-шаговому плану минимизирующую f точку на отрезке длины $L - \tilde{x}_1$, т. е. бо́льшей, чем

$$L - \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}} L = \frac{u_{n+3} - u_{n+1}}{u_{n+3}} L = \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}} L.$$

Даже если положение точки $\tilde{x}_2$ на этом отрезке наиболее благоприятно, то ошибка в определении окажется на основании индуктивного предположения большей, чем $\frac{L}{u_{n+3}}$.

Симметричные рассуждения показывают, что план, начинающийся выбором некоторой точки

$$\tilde{x}_2 > \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}} L,$$

также может при соответствующих неблагоприятных условиях привести к большей ошибке в определении $\tilde{x}$, чем план Φ_{n+1}.

Пусть теперь

$$\tilde{x}_1 > \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}} L.$$

Если в действительности x находится между 0 и $\tilde{x}_1$, то на поиски местоположения этой точки нам остается $n-1$ наблюдение, а длина отрезка, заключающего эту точку, больше, чем $\frac{u_{n+1}}{u_{n+3}} L$. Значит, даже план Φ_{n-1} (который, по предположению, в этих условиях оптимален) приведет нас к ошибке, большей, чем

$$\tau^A_{\Phi_{n-1}}\left(n-1, \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}} L\right) =$$

$$= \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}} \tau^A_{\Phi_{n-1}}(n-1, L) = \frac{u_{n+1}}{u_{n+3}} \frac{L}{u_{n+1}} = \frac{L}{u_{n+3}}.$$

Симметрично разбирается случай, когда

$$\tilde{x}_2 > \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}} L.$$

Следовательно, план Φ_{n+1} является оптимальным, и теорема доказана.

Итак, единственная минимизирующая функцию f точка может быть с помощью n наблюдений определена на отрезке длины L с ошибкой, не превосходящей $\frac{L}{u_{n+2}}$.

Поэтому n наблюдений позволяют определить точку, минимизирующую f, с ошибкой ε или меньше, на отрезке, длина которого не превосходит εu_{n+2}.

Наконец, чтобы быть уверенным в том, что точка, минимизирующая функцию f, определена на отрезке длины L с ошибкой, не превосходящей ε, необходимо произвести такое число n наблюдений, что

$$u_{n+1} < \frac{L}{\varepsilon} \leqq u_{n+2}.$$

Таким образом, мы ответили на все вопросы п. 3.

12. Решение задачи *Б* можно получить из описанного выше решения задачи *А* без особого труда.

Пусть нам дан отрезок длины L. Проделаем на этом отрезке первые $n-2$ шага фибоначчиева плана Φ_{n-1}. В результате мы придем к отрезку длины $\frac{3L}{u_{n+1}}$ с концами x' и x'' и с известным значением f в одной из точек $x_1 = x' + \frac{L}{u_{n+1}}$ или $x_2 = x' + \frac{2L}{u_{n+1}}$. Ограничимся рассмотрением первого из этих случаев (второй рассматривается симметрично).

Итак, пусть $f(x_1)$ нам уже известно. Выберем произвольное число γ, по абсолютной величине меньшее, чем $\frac{L}{u_{n+1}}$; вычислим $f(x_2 - \gamma)$ (это есть $(n-1)$-е вычисленное значение функции f) и сравним $f(x_1)$ и $f(x_2 - \gamma)$.

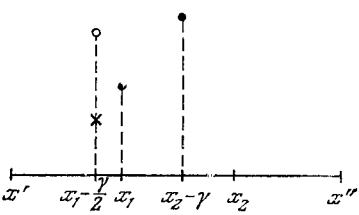

Рис. 26.

Если $f(x_1) \leqq f(x_2 - \gamma)$ (случай ∘ на рис. 26), то, очевидно, $\bar{x}$ находится между x' и $x_2 - \gamma$. Вычислим

$$f\left(\frac{x' + (x_2 - \gamma)}{2}\right) = f\left(x_1 - \frac{\gamma}{2}\right)$$

(это — последнее, n-е вычисленное значение функции f).

Если при этом

$$f\left(x_1 - \frac{\gamma}{2}\right) \leqq f(x_1)$$

(случай x на рис. 26), то x расположено между x' и x_1. Положим $\bar{x}=\frac{x'+x_1}{2}$. Ошибка в определении $\bar{x}$ не превосходит половины длины отрезка от x' до x_1, т. е. $\frac{L}{2u_{n+1}}$. Если

$$f\left(x_1-\frac{\gamma}{2}\right)>f(x_1)$$

(случай ∘ на рис. 26), то $\bar{x}$ находится между $x_1-\frac{\gamma}{2}$ и $x_2-\gamma$. Положив $\bar{x}=\frac{1}{2}\left(\left(x_1-\frac{\gamma}{2}\right)+(x_2-\gamma)\right)$, мы совершим ошибку, не бóльшую, чем

$$\frac{1}{2}\left((x_2-\gamma)-\left(x_1-\frac{\gamma}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(x_2-x_1-\frac{\gamma}{2}\right)=$$

$$=\frac{x_2-x_1}{2}-\frac{\gamma}{4}=\frac{L}{2u_{n+1}}-\frac{\gamma}{4}.$$

Пусть теперь $f(x_1)>f(x_2-\gamma)$ (рис. 27). Тогда $\bar{x}$ находится между x_1 и x''.

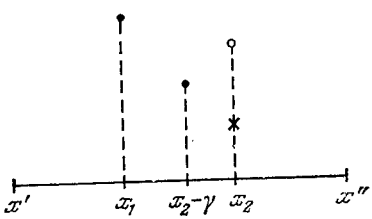

Рис. 27.

Вычислим $f(x_2)$ (последнее вычисленное значение f).

Если

$$f(x_2-\gamma)\leqq f(x_2)$$

(случай ∘ на рис. 27), то $\bar{x}$ расположено между x_1 и x_2; беря $\bar{x}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, мы допустим ошибку, достигающую разве лишь $\frac{1}{2}(x_2-x_1)=\frac{L}{2u_{n+1}}$.

Если, наконец,

$$f(x_2-\gamma)>f(x_2)$$

(случай x на рис. 27), то $\bar{x}$ расположено между $x_2-\gamma$ и x''; положив $\bar{x}=\frac{1}{2}(x''+(x_2-\gamma))$, мы совершаем ошибку, не превосходящую

$$\frac{1}{2}(x''-(x_2-\gamma))=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{u_{n+1}}+\gamma\right)=\frac{L}{2u_{n+1}}+\frac{\gamma}{2}.$$

В наихудшем для нас случае при $\gamma > 0$ ошибка может таким образом достигнуть величины $\frac{L}{2u_{n+1}} + \frac{\gamma}{2}$, а при $\gamma < 0$ — величины $\frac{L}{2u_{n+1}} - \frac{\gamma}{4}$. Поскольку, однако, число γ находится в нашем распоряжении, мы можем сделать ошибку, сколь угодно близкой к $\frac{L}{2u_{n+1}}$.

Нам остается убедиться в том, что ошибку $\frac{L}{2u_{n+1}}$ уменьшить нельзя.

В самом деле, отклонения от описанного плана на каком-либо из первых $n-2$ шагов могут привести, как видно из теоремы п. 11, только к увеличению длины отрезка, в котором местоположение минимизирующей точки определяется последующими измерениями, и тем самым к заведомому увеличению максимальной ошибки. Остается проверить оптимальность действий, совершаемых на последних двух шагах.

Прежде всего, отклонение от описанных действий может означать окончательный выбор в качестве $\bar{x}$ не середины отрезка, где эта точка действительно расположена, а другой точки. Ясно, что это приведет к тому, что возможная ошибка окажется равной большей части отрезка, т. е. возрастет. Следовательно, должна быть выбрана именно середина отрезка.

Далее, мы могли бы выбрать для последнего определения f точку, не близкую к точке x_1 (или соответственно к x_2). Но тогда возможная ошибка увеличилась бы и притом пропорционально расстоянию между этими точками.

Наконец, к таким же последствиям привел бы выбор точки для предпоследнего определения f, далекой от x_2 (соответственно от x_1).

Итак, ни одно из отклонений от описанного плана не может повлечь за собой уменьшения возможной ошибки до числа, меньшего, чем $\frac{L}{2u_{n+1}}$. Это показывает, что задача $Б$ нами решена.

Мы предоставляем читателю сформулировать в случае задачи $Б$ ответы на остальные вопросы, перечисленные в п. 3.

13. В предыдущих пунктах описание самого плана поиска сопровождалось уточнениями постановки

задачи, формулировками, связанными с понятием оптимальности и обоснованиями оптимальности конструируемого плана. Все эти отступления от прямого описания являются неотъемлемыми элементами всякого математического рассуждения, цель которого состоит не только в *указании* какого-то процесса, но и в *доказательстве* того, что этот процесс — именно тот, который нас интересует. Вместе с тем во многих случаях существенным является четкое описание действий как таковых, а вся аргументация этих действий становится совершенно неважной. Это бывает тогда, когда, например, после решения задачи имеется в виду фактическое осуществление этого решения. В таких случаях для реализации решения задачи на практике необходимо располагать не столько математическим обоснованием верности решения, сколько предельно четкими, не допускающими каких бы то ни было кривотолков, предписаниями по его претворению в жизнь.

План наиболее точных поисков на отрезке от x' до x'' точки $\bar{x}$, минимизирующей функцию f в условиях задачи A в изложении, преследующем только что описанные, так сказать, «практические» цели, напоминает план установления вида растения по ботаническому определителю (заметим, что определение растения есть тоже поиск!). Он принимает следующий вид (если в конце пункта не указывается, к какому пункту следует переходить, то нужно переходить к следующему пункту):

1°. Сравнить 1 и n:

а) если $n = 1$, то перейти к п. 2°;

б) если $n > 1$, то перейти к п. 4°.

2°. Вычислить $\bar{x} = \dfrac{x' + x''}{2}$.

3°. Вычислить $f(\bar{x})$; на этом процесс кончается.

4°. Вычислить

$$x_1 = x' + \frac{u_n}{u_{n+2}}(x'' - x') \quad \text{и} \quad x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x').$$

5°. Вычислить $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

6°. Сравнить 2 и n:

а) если $n = 2$, то перейти к п. 7°;

б) если $n > 2$, то перейти к п. 10°.

7°. Сравнить $f(x_1)$ и $f(x_2)$:
а) если $f(x_1) \leqq f(x_2)$, то перейти к п. 8°;
б) если $f(x_1) > f(x_2)$, то перейти к п. 9°.
8°. Положить $\bar{x} = x_1$ и закончить процесс.
9°. Положить $\bar{x} = x_2$ и закончить процесс.
10°. Сравнить $f(x_1)$ и $f(x_2)$:
а) если $f(x_1) \leqq f(x_2)$, то перейти к п. 11°;
б) если $f(x_1) > f(x_2)$, то перейти к п. 14°.
11°. Переобозначить

$$\begin{array}{ll} x_2 & \text{через } x'', \\ x_1 & \text{через } x_2, \\ n-1 & \text{через } n. \end{array}$$

12°. Вычислить

$$x_1 = x' + \frac{u_n}{u_{n+2}}(x'' - x').$$

13°. Вычислить $f(x_1)$ и перейти к п. 6°.
14°. Переобозначить

$$\begin{array}{ll} x_1 & \text{через } x', \\ x_2 & \text{через } x_1, \\ n-1 & \text{через } n. \end{array}$$

15°. Вычислить

$$x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x').$$

16°. Вычислить $f(x_2)$ и перейти к п. 6°.

14. Хотя сформулированное описание оптимального плана поисков минимума функции f абсолютно четкое, не оставляющее места какому-либо произволу, и в применении к каждой конкретной функции f, отрезку от x' до x'' и числу n предписывает совершенно точную последовательность действий, оно является довольно запутанным и трудно обозримым.

Приведем поэтому для наглядности еще одно описание этого же плана в виде некоторой графической схемы (рис. 28).

Схемы такого рода обычно называются *блок-схемами*. Составление блок-схемы вычислительного процесса обычно является первым этапом при составлении программы проведения вычислений на электронных цифровых вычислительных машинах.

15. Приведем в заключение пример использования описанного в пп. 13 и 14 плана для нахождения

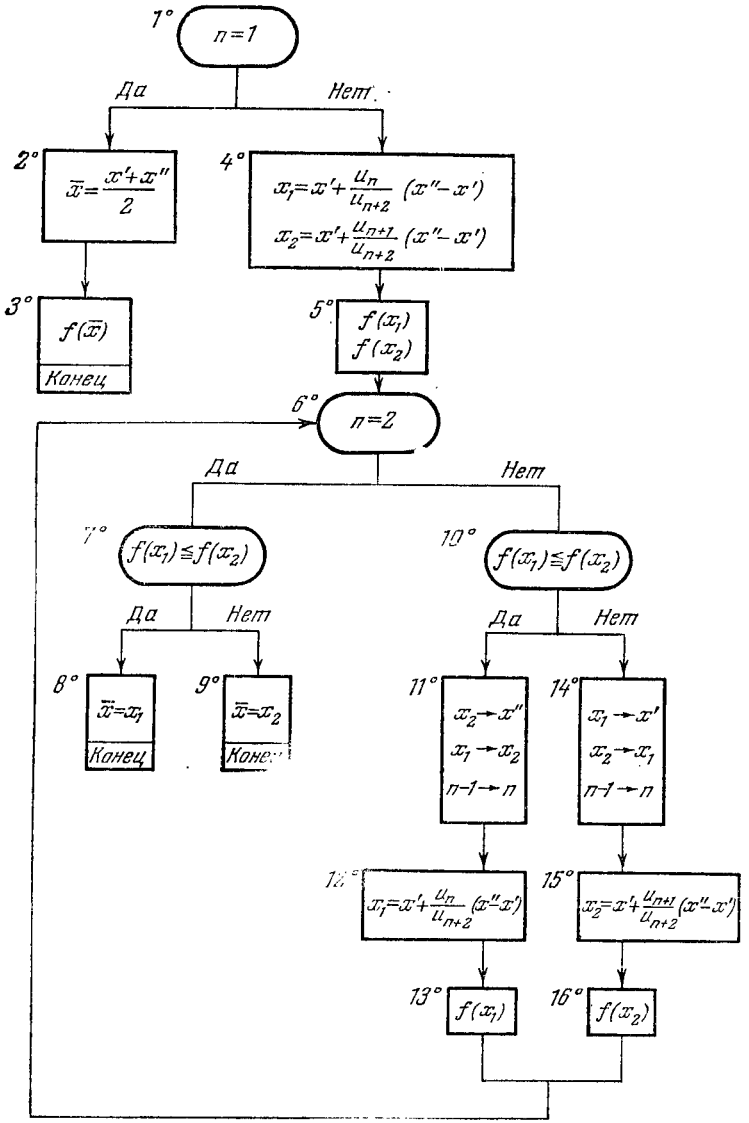
1°
n=1
Да
Нет
2°
$\bar{x}=\frac{x'+x''}{2}$
4°
$x_1=x'+\frac{u_n}{u_{n+2}}(x''-x')$
$x_2=x'+\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x''-x')$
3°
$f(\bar{x})$
Конец
5°
$f(x_1)$
$f(x_2)$
6°
n=2
Да
Нет
7°
$f(x_1)\leqq f(x_2)$
10°
$f(x_1)\leqq f(x_2)$
Да
Нет
Да
Нет
8°
$\bar{x}=x_1$
Конец
9°
$\bar{x}=x_2$
Конец
11°
$x_2\to x''$
$x_1\to x_2$
$n-1\to n$
14°
$x_1\to x'$
$x_2\to x_1$
$n-1\to n$
12°
$x_1=x'+\frac{u_n}{u_{n+2}}(x''-x')$
15°
$x_2=x'+\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x''-x')$
13°
$f(x_1)$
16°
$f(x_2)$

Рис. 28.

с помощью пяти вычислений на отрезке от 1 до 2 точки $\bar{x}$, минимизирующей функцию

$$f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}.$$

Предварительно сделаем важное замечание.

Нахождение точки, минимизирующей (или максимизирующей) функцию, которая задана *аналитически* (т. е. в виде формулы, позволяющей вычислять ее значения), обычно удобнее проводить не методами теории поиска, а другими, более приспособленными для этого приемами, которые относятся к дифференциальному исчислению. Поэтому следует иметь в виду, что приводимый далее пример носит чисто иллюстративный характер. Диференциальное исчисление позволяет без труда показать, что в этом случае $\bar{x}=\sqrt[3]{4}=1{,}5874011\ldots$ Нам же удастся найти значительно более грубое приближение. Однако в тех случаях, когда заранее о функции нам неизвестно ничего (кроме того, что она не может переходить от возрастания к убыванию) или же выражения, которыми она задается, чересчур сложны, методика дифференциального исчисления неприменима, и теория поиска оказывается полезным инструментом.

1°. Сравнение $n=5$ и 1 дает нам, что $n\neq 1$, поэтому переходим к п. 4°.

4°. Вычисляем:

$$x_1=x'+\frac{u_n}{u_{n+2}}(x''-x')=1+\frac{5}{13}(2-1)=1{,}38461,$$

$$x_2=x'+\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x''-x')=1+\frac{8}{13}(2-1)=1{,}61538.$$

5°. Вычисляем:

$$f(x_1)=\frac{1}{x_1}+\sqrt{x_1}=f(1{,}38461)=0{,}72222+1{,}17670=$$
$$=1{,}89892,$$

$$f(x_2)=\frac{1}{x_2}+\sqrt{x_2}=f(1{,}61538)=0{,}61905+1{,}27098=$$
$$=1{,}89003.$$

6°. Сравнение $n=5$ и 2 дает, что $n\neq 2$; поэтому переходим к п. 10°.

10°. Сравнение

$$f(x_1) = 1{,}89892 \quad \text{и} \quad f(x_2) = 1{,}89003$$

дает нам $f(x_1) > f(x_2)$; поэтому переходим к п. 14°.

14°. Переобозначаем:

$$x_1 \to x' = 1{,}38461,$$
$$x_2 \to x_1 = 1{,}61538,$$
$$n = 4.$$

15°. Вычисляем:

$$x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x') = 1{,}38461 + \frac{5}{8}(2 - 1{,}38461) = 1{,}76927.$$

16°. Вычисляем:

$$f(x_2) = \frac{1}{x_2} + \sqrt{x_2} = f(1{,}76927) = 0{,}56522 + 1{,}33012 = 1{,}89534$$

и переходим к п. 6°.

6°. Сравниваем $n = 4$ и 2; поскольку $n \neq 2$, переходим к п. 10°.

10°. Сравниваем $f(x_1) = 1{,}89003$ и $f(x_2) = 1{,}89534$; поскольку $f(x_1) \leqq f(x_2)$, переходим к п. 11°.

11°. Переобозначаем:

$$x_2 \to x'' = 1{,}76923,$$
$$x_1 \to x_2 = 1{,}61538,$$
$$n = 3.$$

12°. Вычисляем:

$$x_1 = x' + \frac{u_n}{u_{n+2}}(x'' - x') = 1{,}38461 + \frac{2}{5}(1{,}76923 - 1{,}38461) = 1{,}53846.$$

13°. Вычисляем:

$$f(x_1) = \frac{1}{x_1} + \sqrt{x_1} - f(1{,}53846) = 0{,}65000 + 1{,}24035 = 1{,}89035$$

и переходим к п. 6°.

6°. Сравниваем $n = 3$ и 2; поскольку $n \neq 2$, переходим к п. 10°.

10°. Сравниваем

$$f(x_1) = 1{,}89035 \quad \text{и} \quad f(x_2) = 1{,}89003;$$

поскольку $f(x_1) > f(x_2)$, переходим к п. 14°.

14°. Переобозначаем:

$$x_1 \to x' = 1{,}53846,$$
$$x_2 \to x_1 = 1{,}61538,$$
$$n = 2.$$

15°. Вычисляем:

$$x_2 = x' + \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}(x'' - x') =$$
$$= 1{,}53846 + \frac{2}{3}(1{,}76923 - 1{,}53846) = 1{,}69231.$$

16°. Вычисляем

$$f(x_2) = \frac{1}{x_2} + \sqrt{x_2} = f(1{,}69231) = 0{,}59091 + 1{,}30089 =$$
$$= 1{,}89170$$

и переходим к п. 6°.

6°. Сравнение n и 2 дает нам, что $n = 2$; переходим к п. 7°.

7°. Сравниваем

$$f(x_1) = 1{,}89003 \quad \text{и} \quad f(x_2) = 1{,}89170;$$

$f(x_1) \leqq f(x_2)$; поэтому переходим к п. 8.

8°. Полагаем $\bar{x} = 1{,}61538$.

На основании теоремы п. 11 найденное нами $\bar{x}$ может отличаться от истинного положения минимизирующей точки не более чем на $\frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{u_7} = \frac{1}{13} = 0{,}077$. Фактически эта ошибка оказывается меньшей; она равна 0,028. Заметим, что принимаемое нами за наименьшее значение функции f, т. е. $f(x)$, равно 1,89003 и отличается от истинного наименьшего значения f, равного

$$f(\sqrt[3]{4}) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} = 1{,}88988,$$

лишь на 0,00015. Это показывает, что значения x можно было в ходе наших вычислений определять с меньшей точностью, чем значения f.

Сам по себе такой вывод не содержит ничего удивительного. В самом деле, значения x мы должны находить с той предельной точностью, с какой мы можем в наших условиях найти минимизирующую точку $\bar{x}$ $\left(\text{мы знаем, что эта точность равна } \frac{1}{u_{n+2}}\right)$. Значения же функции f должны вычисляться с точностью, обеспечивающей сравнение пар значений этой функции и выделение из каждой такой пары наименьшего и наибольшего значения. Поэтому если в действительности какие-нибудь $f(a)$ и $f(b)$ сильно отличаются друг от друга и это отличие заметно уже при грубом определении $f(a)$ и $f(b)$, то мы можем вычислять эти значения с малой точностью. Наоборот, если эти $f(a)$ и $f(b)$ в действительности близки, то для выяснения того, какое из них больше другого, приходится вести вычисление с большой точностью. Так как мы наперед (до фактического выполнения вычислений) не знаем, насколько отличаются друг от друга сравниваемые значения функции, мы можем «промахнуться» и вычислить их с недостаточной точностью, которая не даст возможности решить, какое из этих значений больше. В этом случае придется произвести повторные, более точные вычисления, затратив на это дополнительные усилия.

Все сказанное вызывает необходимость рассмотрения дальнейших проблем, касающихся «управления точностью» вычислительного процесса. Однако эти вопросы довольно сложны и с темой данной книжки непосредственно уже не связаны.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие к первому изданию 3
Предисловне к четвертому изданию 5
Введение 7
§ 1. Простейшие свойства чнсел Фибоначчи . . . 11
§ 2. Теоретико-числовые свойства чисел Фибоначчи 39
§ 3. Числа Фибоначчи и непрерывные дроби . . . 71
§ 4. Числа Фибоначчн и геометрия 94
§ 5. Числа Фибоначчи и теория поиска 115

Николай Николаевич Воробьев
Числа Фибоначчи

(Серия «Популярные лекции по математике»)

М., 1978 г., 144 стр.

Редактор В. В. Доиченко
Техн. редактор Е. В. Морозова
Корректор Л. С. Сомова

ИВ № 11172

Сдано в набор 24.02.78. Подписано к печати 01.09.78. Бумага 84×108$^{1}/_{32}$, тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 7,56. Уч.-изд. л. 7,07. Тираж 100 000 экз. Заказ № 990. Цена 25 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. А. И. Маркушевич. Возвратные последовательности.
Вып. 2. И. П. Натансон. Простейшие задачи на максимум и минимум.
Вып. 3. И. С. Соминский. Метод математической индукции.
Вып. 4. А. И. Маркушевич. Замечательные кривые.
Вып. 5. П. П. Коровкин. Неравенства.
Вып. 6. Н. Н. Воробьев. Числа Фибоначчи.
Вып. 7. А. Г. Курош. Алгебраические уравнения произвольных степеней.
Вып. 8. А. О. Гельфонд. Решение уравнений в целых числах.
Вып. 9. А. И. Маркушевич. Площади и логарифмы.
Вып. 10. А. С. Смогоржевский. Метод координат.
Вып. 11. Я. С. Дубнов. Ошибки в геометрических доказательствах.
Вып. 12. И. П. Натансон. Суммирование бесконечно малых велнчин.
Вып. 13. А. И. Маркушевич. Комплексные числа и конформные отображения.
Вып. 14. А. И. Фетисов. О доказательствах в геометрии.
Вып. 15. И. Р. Шафаревич. О решении уравнений высших степеней.
Вып. 16. В. Г. Шерватов. Гиперболические функции.
Вып. 17. В. Г. Болтянский. Что такое дифференцирование?
Вып. 18. Г. М. Миракьян. Прямой круговой цилиндр.
Вып. 19. Л. А. Люстерник. Кратчайшие линии.
Вып. 20. А. М. Лопшиц. Вычисление площадей ориентированных фигур.
Вып. 21. Л. И. Головина и И. М. Яглом. Индукция в геометрии.
Вып. 22. В. Г. Болтянский. Равновеликие и равносоставленные фигуры.
Вып. 23. А. С. Смогоржевский. О геометрии Лобачевского.

Вып. 24. Б. И. Аргунов и Л. А. Скорняков. Конфигурационные теоремы.
Вып. 25. А. С. Смогоржевский. Линейка в геометрических построениях.
Вып. 26. Б. А. Трахтенброт. Алгоритмы и машинное решение задач.
Вып. 27. В. А. Успенский. Некоторые приложения механики к математике.
Вып. 28. Н. А. Архангельский и Б. И. Зайцев. Автоматические цифровые машины.
Вып. 29. А. Н. Костовский. Геометрические построения одним циркулем.
Вып. 30. Г. Е. Шилов. Как строить графики.
Вып. 31. А. Г. Дорфман. Оптика конических сечений.
Вып. 32. Е. С. Вентцель. Элементы теории игр.
Вып. 33. А. С. Барсов. Что такое линейное программирование?
Вып. 34. Б. Е. Маргулис. Системы линейных уравнений.
Вып. 35. Н. Я. Виленкин. Метод последовательных приближений.
Вып. 36. В. Г. Болтянский. Огибающая.
Вып. 37. Г. Е. Шилов. Простая гамма (устройство музыкальной шкалы).
Вып. 38. Ю. А. Шрейдер. Что такое расстояние?
Вып. 39. Н. Н. Воробьев. Признаки делимости.
Вып. 40. С. В. Фомин. Системы счисления.
Вып. 41. Б. Ю. Коган. Приложение механики к геометрии.
Вып. 42. Ю. И. Любич и Л. А. Шор. Кинематический метод в геометрических задачах.
Вып. 43. В. А. Успенский. Треугольник Паскаля.
Вып. 44. И. Я. Бакельман. Инверсия.
Вып. 45. И. М. Яглом. Необыкновенная алгебра.
Вып. 46. И. М. Соболь. Метод Монте-Карло.
Вып. 47. Л. А. Калужнин. Основная теорема арифметики.
Вып. 48. А. С. Солодовников. Системы линейных неравенств.
Вып. 49. Г. Е. Шилов. Математический анализ в области рациональных функций.
Вып. 50. В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг. Разбиение фигур на меньшие части.
Вып. 51. И. М. Бескин. Изображения пространственных фигур.
Вып. 52. Н. М. Бескин. Деление отрезка в данном отношении.
Вып. 53. Б. А. Розенфельд и Н. Д. Сергеева. Стереографическая проекция.